Université Cadi Ayyad
Faculté Polydisciplinaire de Safi

Chapitre III : Introduction à la géométrie algébrique

Algèbre commutative et Applications

SMA S6

Par :
Karmouni Mohammed

Année Universitaire : 2019-2020

Table des matières

1 Introduction à la géométrie algébrique **5**

1.1 Elément entier sur un anneau 5

1.2 Théorème de montée 7

1.3 Théorème des zéros de Hilbert 8

CHAPITRE 1

Introduction à la géométrie algébrique

Une des applications les plus importantes et les plus intéressantes de la théorie des modules(anneaux) se trouve dans l'étude de la géométrie algébrique, c'est à dire l'étude des solutions d'un système d'équations algébrique dans l'espace affine.

1.1 Elément entier sur un anneau

Dans tout ce qui suit, les anneaux seront commutatifs.

Définition 1.1. *Soit B un anneau, A un sous-anneau de B. Un élément $x \in B$ est dit entier sur A, s'il est racine d'un polynôme unitaire à coefficients dans A c-à-d. s'il existe $a_1, a_2, ..., a_n \in A$ tel que : $x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n = 0$; une telle relation est appelée relation de dépendance intégrale de x sur A.*

$\longrightarrow$ Les éléments de A sont entier sur A.
$\longrightarrow$ Lorsque A est un corps, un élément est entier sur A s'il est algébrique sur A.

Proposition 1.2. *Soit A un sous-anneau d'un anneau B et x un élément de B. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *x est entier sur A ;*
2. *le sous-anneau $A[x]$ engendré par A et x est un A-module de type fini ;*
3. *il existe un sous-anneau C de B, tel que $A[x] \subseteq C$ et C est un A-module de type fini.*

Démonstration. 1) $\Longrightarrow$ 2) x est entier sur A, donc $\exists a_1, a_2, ..., a_n \in A$ tel que $x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n = 0$. Montrons que $A[x] =< 1, x, x^2, ..., x^{n-1} >$. En effet, on a $x^n = -a_1x^{n-1} - ... - a_n$ donc $\forall r \geqslant n$ $x^r \in< 1, x, x^2, ..., x^{n-1} >$ d'où $A[x]$ est engendré par $\{1, x, x^2, ..., x^{n-1}\}$.
2) $\Longrightarrow$ 3) Il suffit de prendre $C = A[x]$.
3) $\Longrightarrow$ 1) Soit C un sous-anneau de B tel que C est un A-module de type fini engendré par $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$ et $A[x] \subseteq C$, alors $y_ix \in C$, pour tout $i = 1, ..., n$. Donc, il existe $(a_{i,j})_{1\leqslant j\leqslant n}$ tel que $y_ix = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j$, $a_{i,j} \in A$. Nous avons

$$(x - a_{1,1})y_1 - a_{1,2}y_2 - ..... - a_{1,n}y_n = 0$$

$$a_{2,1}y_1 - (x - a_{2,2})y_2 - ..... - a_{2,n}y_n = 0$$

....

$$a_{n,1}y_1 - ..... - a_{n,n-1}y_{n-1} - (x - a_{n,n})y_n = 0$$

Si on note α_{ij} le cofacteur de l'élément (i,j) de la matrice de ce système, si l'on multiplie par α_{ij} la i-ème ligne et que l'on somme on obtiendra :

$$det[\delta_{ij}x - a_{ij}].y_j = 0$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker et $[\delta_{ij}x - a_{ij}]$ est la matrice du système précédent. Posons $d = det[\delta_{ij}x - a_{ij}]$; on aura donc $dy_j = 0$, $1 \leqslant j \leqslant n$. D'où $dC = 0$ et $d = d.1 = 0$. En développant le déterminant d, on obtient une équation de la forme : $f(x) = 0$ où $f \in A[x]$ est un polynôme unitaire de degré n. □

Corollaire 1.3. *Soit A un sous-anneau d'un anneau B, soient $x_1, x_2, ..., x_n \in B$; on suppose x_i entier sur A et pour $2 \leqslant i \leqslant n$, x_i entier sur l'anneau $A[x_1, ..., x_n]$. Alors l'anneau $A[x_1, ..., x_n]$ est un A-module de type fini.*

Démonstration. Par récurrence sur n. Pour $n = 1$, $A[x]$ est un A-module de type fini d'après la proposition 1.2.
Supposons $n > 1$ et tel que $A[x_1, ..., x_{n-1}]$ soit un A-module de type fini. Prenons $\{y_1, ..., y_n\}$ un système générateur de $A[x_1, ..., x_{n-1}]$. On a x_n entier sur $A[x_1, ..., x_{n-1}]$ donc $A[x_1, ..., x_n] = A[x_1, ..., x_{n-1}][x_n]$ est un $A[x_1, ..., x_{n-1}]$-module de type fini.
Soit $\alpha \in A[x_1, ..., x_n]$, il existe $(\lambda_i) \subseteq A[x_1, ..., x_{n-1}]$ tel que $\alpha = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i z_i$ d'autre part, $\forall 1 \leqslant i \leqslant r$, $\exists (\alpha_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \subseteq A$ tel que $\lambda_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} y_j$ donc $\alpha = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} z_i y_j$ d'où $\{z_i y_j, 1 \leqslant i,j \leqslant n\}$ engendre $A[x_1, ..., x_n]$ comme un A-module. □

Corollaire 1.4. *Soit A un sous-anneau d'un anneau B. L'ensemble C des éléments de B entiers sur A est un sous-anneau de B qui contient A.*

Démonstration. $\forall x \in A$, x est entier sur A donc $A \subseteq C$.
Soient $x, y \in C$, alors $A[x, y]$ est un A-module de type fini d'après le corollaire 1.3. On a xy et $x + y$ dans $A[x, y]$, or $A[xy] \subseteq A[x, y] \subseteq C$ et $A[x \pm y] \subseteq A[x, y] \subseteq C$ par 3) du proposition 1.2, donc $xy \in C$ et $x - y \in C$. □

Définition 1.5. *Soit A un sous-anneau d'un anneau B. L'anneau C de tous les éléments entier sur A, est appelé la fermeture intégrale de A dans B. On la note $\overline{A}^B$.*

Si $A = \overline{A}^B$, on dit que A est intégralement fermé dans B.
Si $B = \overline{A}^B$, on dit que B est entier sur A, ou que B est une extension entière de A. C-à-d, B est entier sur A, ou que B est une extension entière de A si tout élément de B est entier sur A.
D'après la proposition 1.2 : On a si B est un A-module de type fini alors B est entier sur A.

Proposition 1.6. *(Transitivité) Soit A, B deux sous-anneaux d'un anneau C tels que $A \subseteq B$. Si C est entier sur B et B est entier sur A, alors C est entier sur A.*

Démonstration. Soit $x \in C$, alors il existe $(b_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \in B$ tels que : $x^m + b_1 x^{m-1} + ... + b_m = 0$. Donc x est entier sur $A[b_1, ..., b_m]$, d'autre part $b_1, ..., b_m$ sont entier sur A, donc $A[b_1, ..., b_n, x]$ est un A-module de type fini, d'où x est entier sur A. □

Corollaire 1.7. *Soit A un sous-anneau d'un anneau C et soit B la fermeture intégrale de A dans C. Alors B est intégralement fermé dans C, i.e $B = \overline{B}^C = \overline{A}^C$.*

Démonstration. Soit $x \in C$, entier sur B i.e $x \in \overline{B}^C$, donc x entier sur $A \Longrightarrow x \in B = \overline{A}^C = \{x \in C, x \text{ entier sur } A\} \Longrightarrow \overline{B}^C \subseteq B$. Comme $B \subseteq \overline{B}^C$ est toujour vrai, nous avons $B = \overline{B}^C$. □

Proposition 1.8. *Soit A un sous-anneau d'un anneau B, tel que B est entier sur A. Soit I un idéal de B et $J = I \cap A$, alors B/I est entier sur A/J.*

Démonstration. Soit $\overline{x} \in B/J$, alors il existe $a_1, ..., a_n \in A$ tels que $x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_n = 0$ on en déduit $\overline{x}^n + \overline{a_1}.\overline{x}^{n-1} + ... + \overline{a_n} = \overline{0}$, c-à-d, $\overline{x}$ est entier sur A/J. □

Proposition 1.9. *Soit A un sous-anneau d'un anneau B sur lequel B est entier. Soit S une partie multiplicative de A. Alors $S^{-1}B$ est entier sur $S^{-1}A$.*

Démonstration. Soit $\frac{b}{s} \in S^{-1}B$, $b \in B$ $s \in S$, nous avons $b^n + a_1 b^{n-1} + ... + a_n = 0$, $a_i \in A \Longrightarrow \frac{b^n}{s^n} + \frac{a_1}{s}(\frac{b}{s})^{n-1} + ... + \frac{a_n}{s^n} = \frac{0}{1} \in S^{-1}B$.

□

Lemme 1.10. *(de normalisation de Noether)*
Soient K un corps et A une K-algèbre de type fini. Il existe alors un entier d et un homomorphisme injectif $K[X_1, X_2, ..., X_d] \longrightarrow A$ tel que A soit entier sur $K[X_1, ..., X_d]$.

Corollaire 1.11. *Soit K un corps. Si une K-algèbre de type fini est un corps, alors c'est une extension algébrique de K.*

1.2 Théorème de montée

Proposition 1.12. *Soit A un sous-anneau d'un dommaine d'intégrité B sur lequel B est entier. Alors B est un corps si et seulement si A est un corps.*

Démonstration. Supposons que B est un corps, soit $a \in A$ non nul, alors $a^{-1} \in B$ et a^{-1} entier sur A. Soit $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n} \subseteq A$ tel que $(a^{-1})^n + a_1(a^{-1})^{n-1} + ... + a_n = 0$ donc $(a^{-1})^n(1 + a_1 a + a_2 a^2 + ... + a_n a^n) = 0$, d'où $1 + a_1 a + a_2 a^2 + ... + a_n a^n = 0$(B est un D.I) $\Longrightarrow 1 = a(-a_1 - a_2 a - ... - a_n a^{n-1})$ donc a est inversible dans A d'inverse $a^{-1} = -a_1 - a_2 a - ... - a_n a^{n-1}$.
Supposons que A est un corps, soit $b \in B$. Montrons que b est inversible dans B.
$b \in B \Longrightarrow b$ est entier sur $A \Longrightarrow \exists a_1, ..., a_n \in A$ tels que $b^n + a_1 b^{n-1} + ... + a_n = 0 \Longrightarrow b^n + a_1 b^{n-1} + ... + a_{n-1} b = -a_n \Longrightarrow b(b^{n-1} + a_n b^{n-2} + ... + a_{n-1}) = -a_n \Longrightarrow b(-a_n^{-1}(b^{n-1} + a_n b^{n-2} + ... + a_{n-1})) = 1$ d'où b est inversible dans B. □

Corollaire 1.13. *Soit A un sous-anneau d'un anneau B sur lequel B est entier. Soit Q un idéal premier de B. Posons $P = A \cap Q$. Alors Q est un idéal maximal de B si et seulement si P est un idéal maximal de A.*

Démonstration. B/Q un domaine d'intégrité entier sur A/P. Q maximal $\Longleftrightarrow B/Q$ corps $\Longleftrightarrow A/P$ corps $\Longleftrightarrow P$ maximal □

Corollaire 1.14. *Soit A un sous-anneau d'un anneau B sur lequel B est entier. Soient Q et Q' deux idéaux premiers de B tels que $Q \subseteq Q'$. Si $Q' \cap A = Q' \cap A$ alors, $Q = Q'$.*

Démonstration. Posons $P = Q \cap A = Q' \cap A$ et $S = A \setminus P$ donc $S \cap Q = S \cap Q' = \emptyset$ il suffit de montrer que $S^{-1}Q = S^{-1}Q'$.
On a $S^{-1}B$ est entier sur $S^{-1}A = A_P$ donc $S^{-1}Q \cap A_P = S^{-1}(Q \cap A) = S^{-1}P$ qui est maximal dans A_P d'où $S^{-1}Q$ est maximal dans $S^{-1}B$.
$S^{-1}Q' \cap A_P = S^{-1}P$, donc $S^{-1}Q'$ est maximal dans $S^{-1}B$. Or $Q \subseteq Q'$ donc $S^{-1}Q \subseteq S^{-1}Q'$ d'où $S^{-1}Q = S^{-1}Q'$, ce qui montre que $Q = Q'$. □

Théorème 1.15. *(Théorème de montée)*
Soit A un sous-anneau de B tel que B est entier sur A. Si P est un idéal premier de A, il existe Q un idéal premier de B tel que $P = Q \cap A$.

Démonstration. Soit $S = A \setminus P$ on a $S^{-1}B$ est entier sur $S^{-1}A = A_P$. Soit N un idéal maximal de $S^{-1}B$, alors il existe $Q \in Spec(B)$ tel que $Q \cap S = \emptyset$ et $N = S^{-1}Q$ et $S^{-1}Q \cap A_P = N \cap A_P$ est un idéal maximal de A_P (Corollaire 1.13). Or A_P est local d'idéal maximal $S^{-1}P$ donc $S^{-1}Q \cap S^{-1}A = S^{-1}P$ c-à-d $S^{-1}(Q \cap A) = S^{-1}P \Longrightarrow Q \cap A = P$. □

Théorème 1.16. *(2em Théorème de montée) Soit A un sous-anneau d'un anneau B sur lequel B est entier. Si $P_1 \subseteq P_2$ sont deux idéaux premiers de A et si Q_1 est un idéal premier de B tel que $P_1 = A \cap Q_1$, il existe un idéal premier Q_2 de B tel que : $Q_1 \subseteq Q_2$ et $P_2 = A \cap Q_2$.*

1.3 Théorème des zéros de Hilbert

Dans la suite, on fixe un corps algébriquement clos K. Soit n un entier positif et posons $A = k[X_1, ..., X_n]$. Pour tout sous-ensemble S de A, considérons l'ensemble

$$Z(S) = \{(x_1, ..., x_n) \in K^n; f(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \quad \forall f \in S\}.$$

Définition 1.17. *Un sous-ensemble V de K^n est un ensemble algébrique s'il existe un sous-ensemble S de A tel que $V = Z(S)$.*
$\longrightarrow Z(S)$ est un idéal de K^n.

Réciproquement, pour tout sous-ensemble V de K^n, on définit l'idéal de A suivant

$$I(V) = \{f \in A; f(x_1, ..., x_n) = 0 \quad \forall (x_1, ..., x_n) \in V\}.$$

Exemple 1.18.
1. *L'ensemble vide est un ensemble algébrique, $V(\{1\}) = \emptyset$.*
2. *$Z(\{X\}) =$ Droite.*
3. *$Z(\{X^2 + Y^2 - 1\}) =$ Cercle.*
4. *$Z(\{X, Y\}) = \{(0, 0)\}$.*
5. *Un point $(a_1, ..., a_n) \in K^n$ est toujours un ensemble algébrique. En effet,*

$$\{(a_1, ..., a_n)\} = Z(X_1 - a_1, ..., X_n - a_n) \text{ (Voir le lemme 1.23) }.$$

6. *Deux sous-ensembles de A peuvent définir les mêmes ensembles algébriques. Par exemple, on a $Z(X) = Z(X^2) = Z(X^k), k \in \mathbb{N}^*$.*

Proposition 1.19.
1. *Soient S et T des parties de A.*

a) *Si $S \subset T$, alors $Z(T) \subset Z(S)$.*

b) $Z(A) = \emptyset$ *et* $Z(\{0\}) = K^n$

c) *Soit $< S >$ l'idéal de A engendré par S. On a $Z(< S >) = Z(S)$.*

d) *Si J et L sont deux idéaux de A, on a :*

$$Z(J + L) = Z(J) \cap Z(L) \text{ et } Z(JL) = Z(J \cap L) = Z(J) \cup Z(L).$$

2. Si U et V sont deux sous-ensembles de K^n.

a) $I(U) \cap I(V) = I(U \cap V)$.

b) *Si $U \subset V \subset K^n$ alors $I(V) \subset I(U)$.*

c) $I(K^n) = \{0\}$ *et* $I(\emptyset) = A$.

d) *Pour tout idéal J de A, $J \subset I(Z(J))$.*

e) *Pour tout sous-ensemble V de K^n, on a une inclusion $V \subset Z(I(V))$.*

On a égalité si et seulement si Z est un ensemble algébrique. En effet, si $V = Z(I(V))$ alors V est un ensemble algébrique. Inversement, supposons que V soit un ensemble algébrique et soit $S \subset A$ tel que $V = Z(S)$, on a $S \subset I(V)$ (car $I(V) = I(Z(S)) \supset S$) $\Longrightarrow Z(I(V)) \subset Z(S) = V$, d'où $Z(I(V)) \subset V$.

Corollaire 1.20. *Tout sous-ensemble fini de K^n est un ensemble algébrique.*

Démonstration. On a vu que tout point est un ensemble algébrique (Exemple). On conclue par la proposition. □

Remarque 1.21. *1. Si V n'est pas algébrique, on a pas l'égalité $V = Z(I(V))$. Par exemple, $K = \mathbb{R}$ et $V = \{x \in \mathbb{R}, 0 < x < 1\}$. Alors $I(V) = \{0\}$: un élément $P \in I(V) \subset \mathbb{R}[X]$ a une infinité de racines et est donc nul. Par contre, on a $Z(I(V)) = Z(\{0\}) = \mathbb{R} \supsetneqq V$.*

2. L'inclusion $J \subset I(Z(J))$ est en général une inclusion stricte. Il y a deux raisons à celà :

a) *Si K n'est pas algébriquement clos, alors les ensembles algébriques ne voient pas toutes les solutions. Par exemple soit $K = \mathbb{R}$ et $J = (X^2+Y^2+1)$. On a $Z(J) = Z(\{X^2+Y^2+1\}) = \emptyset$; et donc $J \subsetneqq R[X, Y] = I(Z(J))$.*

b) *$Z()$ ne voit pas les puissances supérieures. Par exemple, soit $I = (X^2) \subset K[X]$. On a $Z(I) = \{0\}$ et $I(Z(I)) = (X) \supsetneqq (X^2) = I$.*

Ce sera notamment le sujet des différents théorèmes de Hilbert(les fameuse "Hilbert Nullstellensätze"), où nous étudierons plus en détail le lien entre J et $I(Z(J))$.

Définition 1.22. *L'anneau des fonctions régulières d'un ensemble algébrique $V \subset K^n$ est le quotient $K[V] = A/I(V)$.*

Soit $P = (x_1, ..., x_n) \in K^n$ tel que $P \in V$ avec V un ensemble algébrique.
On définit un homomorphisme d'évaluation $e_P : A \longrightarrow K$ qui associe à un polynôme $f \in A$ sa valeur en P.

$$\begin{array}{cccc} e_P & : & A & \longrightarrow & K \\ & & f & \longrightarrow & e_P(f) = f(p) \end{array}$$

On a $I(V) \subset \ker e_p$, on obtient un homomorphisme $e_P : K[V] \longrightarrow K$. De plus, $e_P(c) = c$, pour tout $c \in K$.

Lemme 1.23.

$$I(P) =< X_1 - x_1, X_2 - x_2, ..., X_n - x_n > .$$

Démonstration. Pour tout $i = 1, .., n$, $X_i - x_i \in I(P)$, d'où $< X_1 - x_1, X_2 - x_2, ..., X_n - x_n > \subseteq I(\{P\})$. Réciproquement, soit $f \in I(P)$, on fait une division euclidienne de f par $X - x_1$: $f = (X - x_1)q_1 + r_1$ avec $q_1 \in A$ et $r_1 \in K[X_2, ..., X_n]$. En itérant ce procédé, on arrive finalement à l'identité

$$f = (X - x_1)q_1 + ... + (X - x_n)q_n + c, \qquad c \in K$$

$f \in I(P) \Longrightarrow f(x_1, ..., x_2) = 0 \Longrightarrow c = 0$.
Donc, $f = (X - x_1)q_1 + ... + (X - x_n)q_n \in < X_1 - x_1, X_2 - x_2, ..., X_n - x_n >$.
D'où, $I(P) \subseteq < X_1 - x_1, X_2 - x_2, ..., X_n - x_n >$. □

Remarque 1.24. *L'écriture correcte serait $I(\{P\})$, afin de ne pas alourdir les notations, nous avons néanmoins préféré omettre les accolades.*

Théorème 1.25. *Les trois propriétés équivalentes suivantes sont vérifiées :*

1. *(forme faible). Si M est un idéal maximal de A alors il existe un point $P \in K^n$ tel que $M = I(P)$.*
2. *(Existence des zéros). Pout tout idéal propre J de A, l'ensemble algébrique $Z(J)$ est non vide.*
3. *(forme forte). Pour tout idéal J de A, on a l'identité $I(Z(J)) = \sqrt{J}$.*

Démonstration. Commençons par montrer l'équivalence des trois formulations, en démontrant les implications 1) $\Longrightarrow$ 2) $\Longrightarrow$ 3) $\Longrightarrow$ 1).
1) $\Longrightarrow$ 2). Soit J un idéal propre de A, il existe un idéal maximal M tel que $J \subset M$. D'après 1), $\exists P \in \mathbb{K}^n$ tel que $M = I(P) \Longrightarrow Z(M) = Z(I(P)) \subset Z(J) \Longrightarrow Z(M) \neq \emptyset$. Donc, $Z(J) \neq \emptyset$.
2) $\Longrightarrow$ 3). Soit J un idéal de A. A est noethérien, l'idéal J possède un système de générateur fini. Soit $f_1, ..., f_m$ des générateurs.
Il s'agit de prouver que

$$\sqrt{J} = I(Z(J)) = \{g \in A, f_i(a_1, ..., a_n) = 0 \Longrightarrow g(a_1, ..., a_n) = 0, \quad i = 1, ..., m\}.$$

On a $\sqrt{J} \subset I(Z(J))$: si $f \in \sqrt{J} \Longrightarrow \exists r \geqslant 1$ tel que $f^r \in J \Longrightarrow \forall (x_1, ..., x_n) \in Z(J), f^r(x_1, ..., x_n) = f(x_1, ..., x_n)^r = 0 \Longrightarrow f(x_1, ..., x_n) = 0$, donc $f \in I(Z(J))$.
Réciproquement, soit $g \in J$ et $R =< f_1, ..., f_m, Yg - 1 >$ on a :

$$\{(a_1, ..., a_n, b) \in K^{n+1}, h(a_1, ..., a_n, b) = 0 \quad \forall h \in R\} = \emptyset$$

car $(1 - Xg)h(a_1, ..., a_n, b) \neq 0$.
D'après 2) $R = K[X_1, X_2, .., X_n, Y]$ donc on a $1 = \sum_{i=1}^{m} h_i(X_1, X_2, .., X_n, Y)f_i + l(X_1, X_2, .., X_n, Y)(Yg - 1)$ où $h_i, l \in K[X_1, X_2, .., X_n, Y]$. L'égalité précédente est fortiori vraie dans $K(Y)[X_1, X_2, .., X_n]$.
Posons $Z = \frac{1}{Y}$, on obtient pour un entier N, $N \geqslant 1$. $Z^N = \sum_{i=1}^{m} k_i(X_1, X_2, .., X_n, Z)f_i + m(X_1, X_2, .., X_n, Z)(g - Z)$ dans $K[X_1, X_2, .., X_n, Z]$. On substituant g à Z, on a

$$g^N \in J \Longrightarrow g \in \sqrt{J}.$$

3) $\Longrightarrow$ 1). Soit M un idéal maximal de A. $Z(M) \neq \emptyset$ car si $Z(M) = \emptyset \Longrightarrow I(Z(M)) = A$. Or $M = \sqrt{M} = I(Z(M)) = A$ et $M \neq A$ absurde. D'où, $Z(M) \neq \emptyset$. Il existe $P \in Z(M)$ tel que $M = \sqrt{M} = I(Z(M)) \subset I(P) \subset M$ (car $I(P)$ un idéal de A) et M maximal de A, d'où $I(P) = M$.

Nous terminons en démontrant la forme faible. Si M est un idéal maximal de A, on a A/M est une extension algèbrique de K ($\overline{A}^K = K$), le corps K étant algébriquement clos, on obtient $A/M = K$. Si $x_1, x_2, ..., x_n$ les images respectives de $X_1, ..., X_n$ dans A/M, ce qui donne $< X_1 - x_1, ..., X_n - x_n >= I(P) \subset M$ or d'après le lemme 1.23 $A/I(P) \simeq K \Longrightarrow I(P)$ est maximal d'où $M = I(P)$.

$\square$

Remarque 1.26. *Si K n'est pas algébriquement clos, les trois formulations de Hilbert ne sont plus vraies.*

Exemple 1.27. *(forme faible)*
Pour $K = \mathbb{R}$, on a $\mathbb{R}[X]/(X^2+1) \simeq \mathbb{C}$ et $< X^2+1 >$ est un idéal maximal mais n'est pas de la forme $< X - a >= I(a)$ quelque soit $a \in \mathbb{R}$.

Exemple 1.28. *(Existence des zéros) Pour $K = \mathbb{R}$: $Z(< X^2 + Y^2 + 1 >) = \emptyset$.*

Exemple 1.29. *(forme forte)*
Pour $K = \mathbb{R}$ et $J =< X^2 + Y^2 + 1 >$, nous avons $Z(J) = \emptyset$ donc $I(Z(J)) = \mathbb{R}[X, Y] \supsetneq \sqrt{J} = J$.

Bibliographie

[1] M. F. Atiyah, I. G. Macdonald (1969), Introduction to commutative algebra, Addison-Wesley.

[2] Josette Calais(2006), Eléments de théorie des anneaux-Anneaux commutatifs, Ellipses.

[3] Najib Mahdou(2013), Introduction à l'Algèbre Homologique, IPNPUB Fez, Morocco.

[4] M-P Malliavin(1985), Algèbre commutative. Applications en géométrie et théorie des nombres, Elsevier Masson.