Université Cadi Ayyad
Faculté Polydisciplinaire de Safi

Chapitre I : Les Anneaux

Algèbre commutative et Applications

SMA S6

Par :
Karmouni Mohammed

Année Universitaire : 2019-2020

Table des matières

0.1 Notion d'anneau 5
0.2 Diviseurs de zéro, Eléments nilpotents, Eléments unités 6
0.3 Notion d'idéaux et d'anneaux quotients 7
0.3.1 Construction d'anneau quotient 8
0.4 Idéaux premiers d'un anneau unitaire commutatif 11
0.4.1 Opérations sur les idéaux d'un anneau 11
0.4.2 Idéaux maximaux d'un anneau unitaire 13
0.5 Nilradical et Radical de Jacobson 14
0.6 Anneau de fraction 16

Anneaux

$\boxed{0.1}$ Notion d'anneau

Définition 0.1. *Un anneau est un ensemble non vide A muni de deux lois de composition internes, une notée additivement $+$ et l'autre multiplicativement . telles que :*

1. *$(A, +)$ est un groupe abélien.*
2. *. est une loi de composition interne associative dans A.*
3. *. est distributive par rapport à la loi $+$: $(x + y)z = xz + yz$ et $z(x + y) = zx + zy$ pour tous $x, y \in A$.*

✓ Si la loi . est commutative, on dit que l'anneau A est commutatif.
✓ Si la loi . admet un élément neutre distinct de 0, noté 1_A ou 1 s'il n'y a pas d'ambiguité, on dit que l'anneau A est unitaire. On conveint que l'on a toujours $0 \neq 1$. Donc, un anneau unitaire a au moins deux éléments, à savoir 1 et 0.
✓ A est dit nul, si $A = \{0\}$. Cet anneau n'est pas unitaire.

Définition 0.2. *Soient $(A, +, .)$ un anneau et B un sous ensemble non vide de A. B est dit un sous-anneau de A si $(B, +, .)$ est un anneau. D'une autre manière :*

1. *$(B, +)$ est un sous groupe de A.*
2. *B est stable par la multiplication : $\forall x, y \in B$, $x.y \in B$.*

✓ Si A est un anneau unitaire, on dit que B est sous-anneau unitaire de A si on a en oùtre $1_A \in B$.
✓ Si A est commutatif, alors tout sous-anneau de A est commutatif.
Pratiquement, pour montrer qu'un sous-ensemble non vide B d'un anneau A est un sous-anneau de A, il suffit de vérifie que : pour tous $x, y \in B$, on a $x - y \in B$ et $xy \in B$. Si de plus $1_A \in B$, B est un sous-anneau unitaire.

Exemple 0.3. 1. *$\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont des anneaux commutatifs unitaires.*

2. *L'anneau $K[X]$ des polynômes à une indéterminée à coefficients dans un corps K est un anneau commutatif unitaire.*
3. *Soit A un anneau unitaire. L'ensemble $M_n(A)$ des matrices $n \times n$ à coefficients dans A muni des régles de calcul habituelle, la somme de deux matrices et le produit des matrices est un anneau unitaire. Si $n \geqslant 2$, ou si A n'est pas commutatif, $M_n(A)$ n'est pas commutatif.*
4. *Si A est un anneau, alors $\{0\}$ et A lui-même sont des sous-anneau de A.*
5. *$Z(A) = \{x \in A, ax = xa$ pour tout $a \in A\}$ est un sous-anneau de A. $Z(A) = A \Longleftrightarrow A$ est commutatif*

6. *Pour tout* $n \geqslant 2$, $n\mathbb{Z} = \{nx, x \in \mathbb{Z}\}$ *est un sous anneau non unitaire de* $\mathbb{Z}$.
7. *Dans* $F(I, \mathbb{R})$ *les fonctions continues forment un sous anneau unitaire.*
8. A_1 *et* A_2 *étant deux anneaux, on considère l'ensemble produit direct :*

$$A_1 \times A_2 = \{(a, b); a \in A_1 \text{ et } b \in A_2\}.$$

$A_1 \times A_2$ *est muni d'une structure d'anneau, grâce à l'addition et à la multiplication respectivement définies par les applications suivantes :*

$$((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \longrightarrow (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \qquad ((x_1, x_2), (y_1, y_2))) \longrightarrow (x_1 y_1, x_2 y_2).$$

$A_1 \times A_2$ *est unitaire* $\Longleftrightarrow$ A_1 *et* A_2 *sont unitaires.* $(1_{A_1}, 1_{A_2})$ *est alors l'élément unité de l'anneau* $A_1 \times A_2$.

Définition 0.4. *Soient* A *et* B *deux anneaux. Une application* $\varphi : A \longrightarrow B$ *est dite un homomorphisme d'anneaux, et on note* $\varphi \in Hom(A, B)$, *si* φ *vérifie :*

⋆ $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)\ \forall\, x, y \in A$.

⋆ $\varphi(x.y) = \varphi(x).\varphi(y)\ \forall\, x, y \in A$. *Si de plus,*

⋆ $\varphi(1_A) = 1_B$, *on dit que* φ *est un homomorphisme d'anneaux unitaires*

Nous avons, $\varphi(0_A) = 0_B$, $\varphi(x - y) = \varphi(x) - \varphi(y)$ et $\varphi(-x) = -\varphi(x)$.

Définition 0.5. *On dit que* $\varphi \in Hom(A, B)$ *est un isomorphisme d'anneaux, s'il existe* $g \in Hom(B, A)$ *tel que* $g \circ \varphi = id_A$ *et* $\varphi \circ g = id_B$. *Ce qui équivalent à* $\varphi \in Hom(A, B)$ *et* φ *est bijectif. On note, dans ce cas,* $\varphi \in Iso(A, B)$.
A *et* B *sont dits isomorphes, s'il existe un isomorphisme d'anneaux de l'un sur l'autre, dans ce cas, on écrit* $A \simeq B$.
Un isomorphisme de A *sur lui-même est appelé un automorphisme de* A.

⋆ $\varphi \in Iso(A, B) \Longrightarrow \varphi^{-1} \in Iso(B, A)$.
Notons par U_A l'ensemble des éléments inversibles de A, qui sont aussi appelés les unités de A.

0.2 Diviseurs de zéro, Eléments nilpotents, Eléments unités

Soit A un anneau unitaire, non nécessairement commutatif, soit $x \in A$.
On dit que x est inversible à gauche s'il existe $z \in A$ tel que $zx = 1$.
On dit que x est inversible à droite s'il existe $y \in A$ tel que $xy = 1$.
On dit que x est inversible s'il est inversible à gauche et à droite, ie $\exists a \in A$ tel que $ax = xa = 1$. L'inverse d'un élément x de A sera noté x^{-1}.

Définition 0.6. *Un corps est un anneau unitaire commutatif tel que tout élément non nul est inversible.*

Remarque 0.7. 1. *Dans tout anneau unitaire* A, *on a* $U_A \neq \emptyset$ *car* 1 *et* -1 *sont dans* U_A.
2. U_A *est un groupe multiplicative.*
3. U_A *est un groupe abélien si et seulement si* A *est commutatif.*

4. $U_{\mathbb{Z}} = \{-1, 1\}$.
5. *Si* $\mathbb{K}$ *est un corps, alors* $U_{\mathbb{K}} = \mathbb{K}^*$.

Exercice 0.8. *Montrer que* $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ *est un corps si et seulement si* p *est un nombre premier.*

Définition 0.9. *Un élément non nul* $a \in A$ *est dit un diviseur de zéro à gauche(resp. à droite) si* $\exists\, b(\neq 0) \in A$ *tel que* $ba = 0$ *(resp.* $ab = 0$*).*
Dans un anneau commutatif on parlera seulement de diviseur de zéro.

Exemple 0.10. *Dans* $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, $\overline{2}$ *et* $\overline{4}$ *sont des diviseurs de zéro.*

Notons que x invesible implique que x n'est pas un diviseur de zéro. Donc un corps n'a pas de diviseur de zéro.

Définition 0.11. *Un anneau est dit intègre s'il est non nul et sans diviseur de zéro.*
On appellera domaine d'intégrité tout anneau unitaire, commutatif intègre.

Pour x et y dans un anneau intègre, on a : $xy = 0 \Longrightarrow x = 0$ ou $y = 0$.

Exemple 0.12.
1. *Tout corps est un domaine d'intégrité.*
2. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *est un domaine d'intégrité si et seulement si* n *est premier.*
3. *Tout domaine d'intégrité fini est un corps (Exercice).*

$\boxed{0.3}$ Notion d'idéaux et d'anneaux quotients

Définition 0.13. *Soient* A *un anneau et* I *un sous ensemble de* A*. On dit que* I *est un idéal à gauche (resp. à droite) de* A *si :*

i) $(I, +)$ *est un sous groupe de* A.

ii) $\forall\, x \in I$, $\forall\, a \in A$, $ax \in I$, *(resp.* $xa \in I$*) càd* $A.I \subseteq I$ *(resp.* $I.A \subseteq I$ *).*

On dit que I *est un idéal bilatère ou simplement un idéal de* A *si* I *est à la fois un idéal à gauche et à droite de* A*. Dans le cas commutatif, on parle alors tout simplement d'idéal.*

Exemple 0.14.
1. $\{0\}$ *et* A *sont des idéaux de* A.
2. *Pour tout* $n \in \mathbb{Z}$, $n\mathbb{Z}$ *est un idéal de l'anneau* $\mathbb{Z}$.
3. *Dans l'anneau* $F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$*, l'ensemble des fonctions continues qui s'annulent en* 0 *est un idéal.*
4. *Soient* A *et* B *deux anneaux unitaires,* $\varphi \in Hom(A, B)$*. Alors* $\ker\varphi$ *est un idéal de* A

Définition 0.15. *Soit* S *une partie non vide d'un anneau* A*. On appelle idéal de* A *engendré par* S*, l'intersection de tous les idéaux de* A *contenant* S*. On notera* (S)*, c'est le plus petit idéal de* A *contenant* S*.*

1. I *est un idéal principal s'il est engendré par un seul élément.*
2. I *est de type fini s'il est engendré par un nombre fini d'éléments.*

Nous avons,

$$(S) = \{\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} a_i x_i b_i, m \in \mathbb{N}^*, a_i, b_i \in A, x_i \in S\}.$$

Définition 0.16. *Un anneau unitaire commutatif* A *est dit principal, si tout idéal de* A *est principal.*
On appellera domaine principal, tout domaine d'intégrité dans lequel tout idéal est principal.

Exemple 0.17. $\mathbb{Z}$ *est un domaine principal.*

0.3.1 Construction d'anneau quotient

Rappelons qu'une relation $\mathcal{R}$ sur un ensemble X est dite relation d'équivalence si elle est réflexive (pour tout $x, x\mathcal{R}x$), symétrique (si $x\mathcal{R}y$, alors $y\mathcal{R}x$) et transitive (si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, alors $x\mathcal{R}z$). L'ensemble des classes d'équivalence de X pour la relation $\mathcal{R}$ est noté $X/\mathcal{R}$.
Soient A un anneau et I un idéal de A. En particulier I est un sous-groupe normal puisque A est un groupe abélien pour la somme. On peut considérer le groupe quotient A/I dont les éléments sont les classes pour la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ définie par :

$$x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow x - y \in I.$$

On note $\overline{x} = x + I$ la classe de l'élément x de A.
-On va munir A/I d'une structure d'anneau.
On définit sur A/I l'addition et la multiplication de la façon suivante :

$$(a + I) + (b + I) = a + b + I, \qquad (a + I)(b + I) = ab + I, a, b \in A.$$

Notons que la somme et la multiplication sont compatibles avec cette relation.
On dit que A/I est l'anneau quotient de A par l'idéal I.
Si A est unitaire, $1 + I$ est l'élément unité pour la multiplication pour A/I. De méme, si A est commutatif alors A/I est commutatif.
La surjection canonique $\pi : A \longrightarrow A/I$ est un morphisme d'anneaux. Ce morphisme est surjectif de noyau I.

Remarque 0.18. *Si $I = \{0\}$, $A/(0)$ s'identifie à A($\pi(a) = a$ pour tout $a \in A$).*
Si $I = A$, A/A est l'anneau nul, car $\pi(a) = \overline{0}$ pour tou $a \in A$.

Lemme 0.19. *Soit A un anneau commutatif unitaire.*

1. *Si I est un idéal de A qui contient 1, alors $I = A$.*
2. *Si I est un idéal de A qui contient un élément de U_A, alors $I = A$.*

Démonstration. Supposons que $1 \in I$, soit $a \in A$, $a = 1a \in I$. On a alors $A \subseteq I$, donc $A = I$.
Si I contienne un élément $x \in U_A$, alors $1 = xx^{-1}$ avec $x \in I$ et $x^{-1} \in A$, donc $1 \in I$. On applique 1) donc $A = I$.

□

Proposition 0.20. *Si I est une partie non vide d'un anneau A. Pour que I est un idéal bilatère de A, il faut et il suffit qu'il existe un anneau A' et un morphisme d'anneux f de A dans A' tel que $\ker f = I$.*

Démonstration. Si A' est un anneau et $f \in Homm(A, A')$, on a $\ker f$ est un idéal bilatère de A. Inversement, si I est un idéal bilatère de A, en prenant $A' = A/I$, on a $I = \ker \pi$, où $\pi : A \longrightarrow A/I$ est la surjection canonique. □

On a la caractérisation suivante des corps :

Proposition 0.21. *Soit A un anneau unitaire commutatif. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) *A est un corps ;*

ii) *Les seuls idéaux de A sont (0) et A ;*

iii) *Tout homomorphisme non nul d'anneaux de $A \longrightarrow B$ est injectif, où B est un anneau quelconque.*

Démonstration. $i) \Longrightarrow ii)$, Supposons que A est un corps. Soit I un idéal de A tq $I \neq \{0\}$. Montrons que $I = A$. En effet, $I \neq \{0\}$ implique qu'il existe un a no nul tq $a \in I \subset A$. A est un corps implique qu'il existe $b \in A$ tq $ab = 1$. Or I est un idéal donne $1 = ab \in I$ donc $A = I$ par le lemme 0.19.
$ii) \Longrightarrow i)$, Soit $x \in A$ non nul. Montrons que x est inversible.
On a xA est un idéal non nul de A, donc $A = xA$, ie il existe $y \in A$ non nul tq $xy = 1$, d'où x est inversible.
$ii) \Longrightarrow iii)$, Soit $\varphi : A \longrightarrow B$, $\varphi \in Hom(A, B)$. On a $\varphi \neq 0$ donc $\ker \varphi \neq A$ et $\ker \varphi$ est un idéal de A d'où $\ker \varphi = \{0\}$.
$iii) \Longrightarrow ii)$, Soit I un idéal de A tq $I \neq A$. Nous avons $I = \{0\}$. En effet, soit $\varphi : A \longrightarrow A/I$ $x \longrightarrow \overline{x}$ non nul. On a $\ker \varphi = I$ et φ est injectif donc $I = \{0\}$

□

Théorème 0.22. *Soit I un idéal bilatère d'un anneau A.*

1. *Tout sous-anneau(resp. idéal) de A/I est l'image par π d'un unique sous anneau(resp. idéal) contenant I. D'une autre manière, si $\overline{J}$ est un sous anneau(resp. idéal) de A/I, alors $\overline{J} = \pi(J)$, où $J = \pi^{-1}(\overline{J}) \supseteq I$ ainsi $\overline{J} = J/I$.*
2. *Si F est un sous anneau(resp. idéal) de A tel que $I \nsubseteq F$, alors $I + F$ est le plus petit sous anneau(resp. idéal) de A contenant I et $\pi(F) = (I + F)/I$.*

Exemple 0.23. *Pour $n \geqslant 2$; dans $\mathbb{N}$, les idéaux de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont les $k\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tels que $k \mid n$ dans $\mathbb{N}$. Ce sont aussi les seuls sous anneau de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.*

L'importance de la structure d'anneau quotient vient notamment du théorème de factorisation que nous démontrons maintenant :

Théorème 0.24. *Soient A et B deux anneaux et $f \in Hom(A, B)$ un morphisme d'anneaux. Si I est un idéal de A contenu dans $\ker f$, il existe un unique homomorphisme d'anneaux $\widetilde{f} \in Hom(A/I, B)$ tel que $f = \widetilde{f} \circ \pi$. On a le diagramme commutatif suivant :*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & B \arrow[d, "\widetilde{f}"] \\ & A/I \end{tikzcd}$$

Démonstration. Unicité, on a $\widetilde{f}(\pi(a)) = f(a)$ pour tout $a \in A$.
$\forall x \in A/I$, $x = \pi(a)$ avec $a \in A$ ce qui montre l'unicité de $\widetilde{f} : A/I \longrightarrow B$. Sinon, si $\exists \widetilde{f_1}, \widetilde{f_2}$, on a $\widetilde{f_1}(x) = \widetilde{f_1}(\pi(a)) = f(a)$ et $\widetilde{f_2}(x) = \widetilde{f_2}(\pi(a)) = f(a)$ pour tout $x \in A/I$. D'où, $\widetilde{f_1} = \widetilde{f_2}$.
Existence, soit $x \in A/I$, alors il existe $a \in A$ tel que $x = \pi(a)$. Si a' un autre représentant de x tel que $x = \pi(a')$, alors $\pi(a - a') = 0 \Longrightarrow a - a' \in I$. On a $I \subseteq \ker f$ donc $f(a - a') = 0 \Longrightarrow f(a) = f(a')$.
On peut poser $\widetilde{f}(x) = f(a)$. Le résultat est indépendant de représentant choisi.
Montrons que $\widetilde{f}$ est un homomorphisme d'anneaux. Comme $\pi(0_A) = 0_{A/I}$ et $\pi(1_A) = 1_{A/I}$ on a $\widetilde{f}(0_{A/I}) = 0_B$ et $\widetilde{f}(1_{A/I}) = 1_B$.
Soient $x = \pi(a)$ et $y = \pi(b) \in A/I$ on a $x + y = \pi(a + b)$,

$$\begin{aligned}\widetilde{f}(x+y) &= \widetilde{f}(\pi(a+b)) = f(a+b)\\ &= f(a)+f(b)\\ &= \widetilde{f}(\pi(a)) + \widetilde{f}(\pi(b)) = \widetilde{f}(x)+\widetilde{f}(y).\end{aligned}$$

et $\widetilde{f}(xy) = f(ab) = f(a)f(b) = \widetilde{f}(x)\widetilde{f}(y)$. D'où, $\widetilde{f}$ est un homomorphisme d'anneaux.

□

Corollaire 0.25. – *f est surjectif $\Longrightarrow \widetilde{f}$ est surjectif.*
– *$I = \ker f \Longrightarrow \widetilde{f}$ est injectif.*
– *f est surjectif et $I = \ker f \Longrightarrow \widetilde{f}$ est isomorphisme.*

Théorème 0.26 (1er Théorème d'isomorphisme)**.** .
Pour tout morphisme f d'un anneau A dans un anneau B, on a : $\operatorname{Im} f \simeq A/\ker f$.

Démonstration. Soit f_1 la restriction surjectif de f, définie par $f_1 : A \longrightarrow \operatorname{Im} f$, $x \longrightarrow f_1(x) = f(x)$. $\ker f_1 = \ker f$, d'après le Théorème 0.24, il existe un unique morphisme $\widetilde{f} \in Hom(A/\ker f, \operatorname{Im} f)$ tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "f_1"'] & A/\ker f \arrow[d, "\exists!\widetilde{f}"] \\ & \operatorname{Im} f \end{tikzcd}$$

Donc, $\widetilde{f} \circ \pi = f_1$.
Comme f_1 est surjectif, alors $\widetilde{f}$ est surjectif et $\ker f_1 = \ker f \Longrightarrow \widetilde{f}$ injectif, par suite $\widetilde{f}$ est un isomorphisme de $A/\ker f$ sur $\operatorname{Im} f$ et $\widetilde{f}(\overline{x}) = \widetilde{f}(\pi(x)) = f(x)$, pour tout $\overline{x} = \pi(x) \in A/\ker f$.

□

Lemme 0.27. *Soit deux anneaux A et A' et deux idéaux bilatères I dans A et I' dans A' ; alors, pour tout morphisme $f \in Hom(A, A')$ tel que $f(I) \subseteq I'$, il existe un unique morphisme $\widetilde{f} \in Hom(A/I, A'/I')$ tel que $\widetilde{f} \circ \pi = \pi' \circ f$, où $\pi et \pi'$ sont les surjections canoniques $A \longrightarrow A/I$ et $A' \longrightarrow A'/I'$.*

Démonstration. $f(I) \subseteq I' \Longleftrightarrow I \subseteq f^{-1}(I')$, d'autre part, on a $\ker(\pi' \circ f) = f^{-1}(I')$. D'après le théorème 0.24, $I \subseteq \ker(\pi' \circ f)$ implique l'existence d'un unique morphisme d'anneaux $\widetilde{f} \in Hom(A/I, A'/I')$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"] & B \arrow[d, "\pi'"] \\ A/I \arrow[r, "\exists!\widetilde{f}"] & A'/I' \end{tikzcd}$$

Donc, $\widetilde{f} \circ \pi = \pi' \circ f$. □

Remarque 0.28. – *Si $\pi' \circ f$ est surjectif, alors $\widetilde{f}$ est surjectif. On notera que $\pi' \circ f$ peut être surjectif, sans que f le soit.*
– *Si $\ker(\pi' \circ f) = I (\Longleftrightarrow f^{-1}(I') = I)$, alors f est injectif.*

Théorème 0.29 (2em Théorème d'isomorphisme)**.** .
Soient I et J deux idéaux bilatères d'un anneaux A, on a : $I/(I \cap J) \simeq (I+J)/J$.

Démonstration. Soit α l'injection canonique de I dans $I+J$, alors, $\alpha(I \cap J) = I \cap J \subseteq J$. D'après le lemme 0.27, il existe un unique $\widetilde{\alpha} \in Hom(I/(I \cap J), (I+J)/J)$ tel que le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\pi"] & I+J \arrow[d, "\pi'"] \\ I/(I \cap J) \arrow[r, "\exists ! \widetilde{\alpha}"] & (I+J)/J \end{tikzcd}$$

commute, $\widetilde{\alpha} \circ \pi = \pi' \circ \alpha$.
On a $\pi' \circ \alpha(I) = \pi'(I) = (I+J)/J$, donc $\pi' \circ \alpha$ est surjectif. D'autre part, $\alpha^{-1}(J) = I \cap J$, donc $\widetilde{\alpha}$ est injectif par suite $\widetilde{\alpha}$ est un isomorphisme. □

Remarque 0.30. *Si $I \cap J = \{0\}$, alors $J \simeq (I+J)/I$ et $I \simeq (I+J)/J$.*

Théorème 0.31 (3em Théorème d'isomorphisme)**.** .
Soient I et J deux idéaux bilatères d'un anneau A tel que $I \subseteq J$, on a : $A/J \simeq (A/J)/(J/I)$.

Démonstration. Soit σ la surjection canonique $A \longrightarrow A/I$. $I \subseteq J \Longrightarrow \sigma(J) = J/I$. Il existe alors un unique morphisme $\sigma \in Hom(A/J, (A/J)/(J/I))$ tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\pi"] & A/I \arrow[d, "\pi'"] \\ A/J \arrow[r, "\exists ! \widetilde{\sigma}"] & (A/J)/(J/I) \end{tikzcd}$$

$\widetilde{\sigma} \circ \pi = \pi' \circ \sigma$.
$\pi' \circ \sigma$ surjectif $\Longrightarrow$ et $\ker(\pi' \circ \sigma) = J \Longrightarrow \widetilde{\sigma}$ surjectif donc $\widetilde{\sigma}$ est un isomorphisme. □

Soit A un anneau unitaire. Soit $\phi : \mathbb{Z} \longrightarrow A$, $n \longrightarrow n1_A$.

Définition 0.32. *On appelle caractéristique de A, l'unique entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $\ker \phi = k\mathbb{Z}$. On écrit alors : $car A = k$.*

Exemple 0.33. *1) L'anneau $\mathbb{Z}$, ainsi que les corps $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sont de caractéristique 0.*
2) Pour $n > 1$ dans $\mathbb{N}$, l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est de caractéristique n.

0.4 Idéaux premiers d'un anneau unitaire commutatif

0.4.1 Opérations sur les idéaux d'un anneau

Dans ce qui suit, A est un anneau unitaire commutatif.
Soit $\{I_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ une famille non vide d'idéau de l'anneau A, alors :

1. $\bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$ est un idéal de A.
2. $\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$ n'est pas, en général, un idéal de A. (l'est, la famille est totalement ordonnée par l'inclusion, en particulier, tous les idéaux sont inclus dans un idéal I_β).

   Soient I et J deux idéaux de A.

3. Somme : La somme de I et J est définie par :

$$I + J = \{a + b, a \in I, b \in J\}.$$

   $I + J$ est un idéal de A et c'est l'idéal engendré par $I \cup J$.(C-à-d $I + J$ est le plus petit idéal contenant $I \cup J$.)

4. Produit : Le produit de I par J est défini par :

$$IJ := \{\sum_{fini} a_i b_i, a_i \in I, b_i \in J\}.$$

   IJ est un idéal de A.

Nous avons, $IJ \subseteq I \cap J$.
Si $I + J = A$ (I et J sont étrangés), alors $IJ = I \cap J$.

Définition 0.34. *Soit P un idéal de A. On dit que P est premier si :*

1. *P est un idéal propre de A ($P \neq A$).*
2. *$\forall x, y \in A$ on a : $xy \in P \Longrightarrow x \in P$ ou $y \in P$.*

Théorème 0.35. *Dans A, I est premier si et seulement si A/I est un domaine d'intégrité.*

Démonstration. Supposons I premier ; alors $I \neq A$ et par suite A/I est non nul. A/I est un anneau unitaire commutatif, montrons qu'il est intègre. Soit $\overline{x}, \overline{y} \in A/I$, tels que $\overline{xy} = \overline{0}$. $\overline{xy} = \overline{0} \Longleftrightarrow \overline{xy} = \overline{0} \Longleftrightarrow xy \in I$. I étant premier, donc $x \in I$ ou $y \in I$ donc A/I est intègre. On en conclut que A/I est un domaine d'intégrité.
Réciproquement, on suppose que l'anneau A/I est un domaine d'intégrité, nécessairement, A/I est non nul, donc I est un idéal propre de A. Soient x et y dans A tels que $xy \in I$. Dans A/I : $\overline{xy} = \overline{0} \Longrightarrow \overline{x} = \overline{0}$ ou $\overline{x} = \overline{0}$; par suite : $x \in I$ ou $y \in I$. Donc I est premier. □

Corollaire 0.36. *Si A est un anneau unitaire et commutatif, alors A est un domaine d'intégrité si et seulement si (0) est un idéal premier.*

Exemple 0.37. *$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est intègre si et seulement si $n = 0$ ou n est premier. On déduit que les idéaux premiers de $\mathbb{Z}$ sont (0) et les $p\mathbb{Z}$, p premier.*

Définition 0.38. *Le Spectre premier ou seulement Spectre de A, noté par $Spec(A)$, est l'ensemble de tous les idéaux premiers de A.*

Lemme 0.39. *Soient I, J et P des idéaux de A. Si P est premier et si $IJ \subseteq P$, alors $I \subset P$ ou $J \subset P$.*

Démonstration. Si $I \nsubseteq P$, il existe $x \in I$ tel que $x \notin P$. De même, si $J \nsubseteq P$, soit $y \in J$ tel que $y \notin P$. Alors, $xy \in IJ$ mais P étant premier, $xy \notin P$. Par suite $IJ \nsubseteq P$. □

Proposition 0.40. *Soit A un anneau. Alors on a :*

1. *Soient $P_1, ..., P_n$ des idéaux premiers de A et I un idéal de A. Si $I \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} P_i$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, alors $I \subseteq P_{i_0}$ pour un certain $i_0 = 1, ..., n$.*

2. *Soient $I_1, ..., I_n$ des idéaux de A et P un idéal premier de A. Si $\bigcap_{i=1}^{n} I_i \subseteq P$, alors $I_{i_0} \subseteq P$ pour un certain $i_0 = 1, ..., n$.*

Démonstration. 1. Par induction sur n sous la forme : $I \nsubseteq P_i \ \forall i \Rightarrow I \nsubseteq \bigcup_{i=1}^{n} P_i$.

– $n = 1$, c'est clair.
– Supposons que l'hypothèse de récurrence est vraie pour $n-1$. On a $\forall i = 1, ..., n$ et $\forall j \neq i$ (avec $j = 1, ..., n$), on peut supposer que $I \nsubseteq \bigcup_{j=1, j\neq i}^{n} P_j$ (car sinon, l'hypothèse de récurrence donne le résultat). Ainsi $\exists x_i \in I \setminus \bigcup_{j=1,j\neq i}^{n} P_j$ pour tout $i = 1, ..., n$. Deux cas se posent :

– Cas 1. $x_i \notin P_i$ pour un certain i. Dans ce cas, on a $x_i \notin \bigcup_{j=1}^{n} P_j$ puisque $x_i \notin P_i$ et $x_i \notin \bigcup_{j=1,j\neq i}^{n} P_j$. Ainsi on a $x_i \in I \setminus \bigcup_{j=1}^{n} P_j$ puisque $x_i \in I$.

– Cas 2. $x_i \in P_i, \ \forall i = 1, ..., n$. Alors soit $y = \sum_{i=1}^{n} x_1 ... x_{i-1} x_{i+1} ... x_n = x_2 ... x_n + x_1 x_3 x_4 ... x_n + x_1 x_2 ... x_{n-1}$. On a $y \notin P_i$ et par suite $y \notin \bigcup_{i=1}^{n} P_i$. D'où $y \in I \setminus \bigcup_{i=1}^{n} P_i$.
Ainsi, dans tous les cas on a $I \nsubseteq \bigcup_{i=1}^{n} P_i$.

2. Par contraposée sous la forme : $I_i \nsubseteq P \ \forall i = 1, ..., n \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} I_i \nsubseteq P$.
Soit $x_i \in I_i \setminus P$ pour tout $i = 1, ..., n$. On a $\prod_{i=1}^{n} x_i \in I_1 I_2 ... I_n \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} I_i$, or $\prod_{i=1}^{n} x_i \notin P$ (puisque $x_i \notin P \ \forall i = 1, ..., n$ et P est un idéal premier). D'où le résultat. ■

□

Corollaire 0.41. *P étant un idéal premier de A, pour tout $n \in \mathbb{N}*$:*
1) $(x \in A$ et $x^n \in P) \Longrightarrow x \in P$.
2) $(I$ idéal de A et $I^n \subseteq P \Longrightarrow) \ I \subseteq P$.

0.4.2 Idéaux maximaux d'un anneau unitaire

Définition 0.42. *I est un idéal bilatère maximal d'un anneau A, si*

1. *I est un idéal bilatère propre de A.*
2. *$(J$ idéal bilatère de A et $I \subseteq J \subseteq A) \Longrightarrow J = I$ ou $J = A$.*

Théorème 0.43. *Dans un anneau unitaire et commutatif A, on a :*
I est un idéal maximal si et seulement si A/I est un corps.

Démonstration. Si A/I est un corps, on a nécessairement $I \neq A$. D'autre part, supposons J idéal de A tel que $I \subsetneq J$; alors J/I est un idéal non nul du corps A/I, donc $J/I = A/I$. Par suite $J = A$, donc I est un idéal maximal de A. Réciproquement, soit I un idéal maximal de A, alors A/I est non nul et c'est un anneau unitaire commutatif ; la maximalité de I implique que A/I n'a pas d'autre idéal que (0) et A/I, donc A/I est un corps. □

$\longrightarrow$ Dans tout corps K, (0) est le seul idéal maximal.

Corollaire 0.44. *Pour un idéal I d'un anneau unitaire commutatif A, on a I maximal $\Longrightarrow I$ premier.*

Démonstration. Il suffit de voir que I maximal $\Longrightarrow A/I$ est un coprs $\Longrightarrow A/I$ est un domaine d'intégrité $\Longrightarrow I$ est premier.

$\square$

$\longrightarrow$ La réciproque du corollaire est fausse. Par exemple, dans $\mathbb{Z}$, (0) est un idéal premier qui n'est pas maximal.
Nous avons le résultat suivant :

Théorème 0.45. *(Exercice) Dans un domaine principal tout idéal premier non nul est maximal.*

Lemme 0.46. *(Axiome de Zorn) Tout ensemble non vide, partiellement ordonné et inductif, a au moins un élément maximal.*

Théorème 0.47. *Tout anneau unitaire a au moins un idéal bilatère (resp. à gauche, à droite) maximal.*

Démonstration. Soit Σ l'ensemble de tous les idéaux propres de A. Σ est ordonné par inclusion.
Soit $\{I_\alpha\}_\alpha$ une chaîne d'éléments de Σ et posons $I = \cup_\alpha I_\alpha$. On a $I \in \Sigma$, en effet :
• $I \neq A$ car si $I = A$, alors $1 \in I = \cup_\alpha I_\alpha$ et par suite il existe α tel que $1 \in I_\alpha$ de sorte que $I_\alpha = A$, absurde. Donc $I \neq A$.
• I est un idéal, en effet :
Soient x et $y \in I$. Alors il existe α_1, α_2 tels que $x \in I_{\alpha_1}$ et $y \in I_{\alpha_2}$. Comme $\{I_\alpha\}_\alpha$ est une chaîne, alors $x, y \in I_{sup(\alpha_1,\alpha_2)}$ et par suite $x - y \in I_{sup(\alpha_1,\alpha_2)} \subseteq I$.
Soient $x \in I$ et $a \in A$. Alors $x \in I_\alpha$ pour un certain α et par suite $ax \in I_\alpha \subseteq I$.
• Ainsi $\Sigma \neq \emptyset$ (car $(0) \in \Sigma$) et toute chaîne de Σ admet un élément maximal.
D'après le lemme de Zorn, Σ admet un élément maximal de A. Si M est cet élément maximal, il est naturellement un idéal maximal de A. $\square$

Corollaire 0.48. *Tout idéal propre de A est contenu dans un idéal maximal.*

Démonstration. Soit I un idéal propre de A. Considèrons l'anneau quotient A/I. D'après le théorème 0.47, A/I admet au moins un idéal maximal N. Or, $N = M/I$, où M est un idéal de A contenant I. Ainsi, M est un idéal maximal contenant I (car sinon, $N = M/I$ ne serait pas maximal dans A/I). $\square$

Définition 0.49. *On appellera anneau local tout anneau unitaire commutatif n'ayant qu'un seul idéal maximal.*

$\longrightarrow$ Tout corps est un anneau local. La réciproque est fausse.

0.5 Nilradical et Radical de Jacobson

A **est un anneau unitaire commutatif.** Un élément non nul $a \in A$ est dit nilpotent si $a^n = 0$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$.

Remarque 0.50. *Tout élément nilpotent est un diviseur de zéro. La réciproque est fausse car* 3 *est un diviseur de zéro dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ mais n'est pas nilpotent.*

Proposition 0.51. *L'ensemble $N(A)$ de tous les éléments nilpotents de A est un idéal de A et $A/N(A)$ n'admet aucun élément nilpotent autre que zéro.*

Démonstration. Montrons que $N(A)$ est un idéal de A.

– On a $N(A) \neq \varnothing$ car $0 \in N(A)$.
– Soient $x \in N(A)$ et $a \in A$. Alors il existe $n \in \mathbb{N}^*/x^n = 0$. Ainsi on a, $(ax)^n = a^n x^n = 0$ (car A est commutatif) et par suite $ax \in N(A)$.
– Soient x et $y \in A$. Alors il existe $n_1 \in \mathbb{N}^*/x^{n_1} = 0$ et $n_2 \in \mathbb{N}^*/y^{n_2} = 0$. Ainsi on a $(x-y)^{n_1+n_2} = \sum_{p=0}^{n_1+n_2} C_{n_1+n_2}^{p} x^p (-y)^{n_1+n_2-p} = 0$.
  Dés lors, $N(A)$ est un idéal de A. Montrons que $A/N(A)$ n'admet aucun élément nilpotent.

– Soit $\overline{a}$ un élément nilpotent de $A/N(A)$, où $a \in A$. Il existe alors $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\overline{a}^n = \overline{0}$; c'est à dire que $a^n \in N(A)$. Dés lors, il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $(a^n)^m (= a^{nm}) = 0$ de sorte que $a \in N(A)$ et $\overline{a} = \overline{0}$ dans $A/N(A)$.

□

Proposition 0.52. *On a :*

$$N(A) = \bigcap_{P \in Spec(A)} P$$

est appelé le nilradical de A.

Démonstration. Soient $x \in N(A)$ et $P \in Spec(A)$. Comme il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^n = 0$ $(\in P)$ et P est premier, alors $x \in P$.
Inversement, soit $x \in \bigcap_{P \in Spec(A)} P$. Supposons que $x \notin N(A)$ et considèrons :
$\Sigma = \{$Idéaux I de $A/n \geqslant 1 \Rightarrow x^n \notin I\}$.
En appliquant le lemme de Zorn à Σ, l'élément (c'est à dire l'idéal) maximal de Σ donne la contradiction. D'où le résultat. □

Remarque 0.53. *Si A est un domaine d'intégrité, alors son nilradical est nul, car (0) étant un idéal premier, $\bigcap_{P \in Spec(A)} P = (0)$; mais la réciproque est fausse.*
En effet, $N(A/N(A)) = (0)$ est nul, cependant $A/N(A)$ n'est pas nécessairement intègre, car $N(A)$ n'est pas nécessairement premier.

Définition 0.54. *Le radical de Jacobson, noté $J(A)$, est défini comme étant l'intersection de tous les idéaux maximaux de A :*

$$J(A) = \bigcap_{\mathcal{M} \in max(A)} \mathcal{M}.$$

Proposition 0.55. *On a :*

$$[x \in J(A)] \Longleftrightarrow [1 - xy \in \mathrm{U}(A),\ \forall y \in A]$$

où $\mathrm{U}(A)$ est le groupe multiplicatif des éléments inversibles de A.

Démonstration. Soit $x \in J(A)$. Supposons qu'il existe $y \in A$ tel que $1-xy \notin U(A)$. Donc $(1-xy)A \subsetneq A$ et par suite il existe un idéal maximal M tel que $(1-xy)A \subseteq M \subsetneq A$. Ainsi on a $1 - xy \in M$ et donc $1 \in M$ (car $x \in M$ puisque $x \in J(A)$) ; c'est à dire que $M = A$, absurde. Et on a $(1-xy) \in U(A)$ pour tout $y \in A$.

Inversement, supposons que $(1-xy) \in U(A)$, pour tout $y \in A$. Par absurde, supposons que $x \notin J(A)$. Donc, il existe $M \in max(A)$ tel que $x \notin M$. Dès lors, on a $M + Ax = A$ car $M \subsetneq M + Ax$ et M est maximal . Ainsi, il existe $y \in A$ et $m \in M$ tels que $1 = m + yx$ et par suite $1 - xy(= m) \notin U(A)$, absurde. Par conséquent, $x \in J(A)$ est cela termine la preuve de la proposition. $\square$

Définition 0.56. *Un anneau A est dit local s'il admet un seul idéal maximal.*
Dans un anneau local, on a $J(A) = M$ et :

$$x \in M \Leftrightarrow (1 - xy \in U(A)\ \forall y \in A)$$

0.6 Anneau de fraction

Dans ce qui suit, A est un anneau unitaire commutatif.

Définition 0.57. *Soit S une partie non vide de l'anneau A, on dit que S est une partie multiplicative de A si :*

1. $\forall a, b \in S, ab \in S$.
2. $1 \in S$ *et* $0 \notin S$.

Exemple 0.58.
1. *Si A est un domaine d'intégrité, alors $A^* = A\ \{O\}$ est une partie multiplicative de A.*
2. *Les éléments réguliers (non diviseurs de zéro) de A est une partie multiplicative de A. Lorsque A est intègre, les éléments réguliers sont les éléments non nuls.*
3. *Si P est un idéal premier de A, alors $S = A\ P$ est une partie multiplicative de A.*
4. *Pour tout $x \in A^*$, $S = \{x^n; n \in \mathbb{N}\}$ est une partie multiplicative de A.*
5. *Pour tout idéal non nul I de A, $S = 1 + I = \{1 + x; x \in I\}$ est une partie multiplicative de A.*
6. *U_A est une partie multiplicative de A.*

Soit S une partie multiplicative de A, on définie une relation sur $S \times A$ par :

$$(s, a) \sim (s', a') \Longleftrightarrow \exists t \in S, t(sa' - s'a) = 0.$$

C'est une relation d'équivalence. En effet :
Il est visible que $\sim$ est réflexive et symétrique. Pour la transitivité, si $(a, s) \sim (\acute{a}, \acute{s})$ et $(\acute{a}, \acute{s}) \sim (a'', s'')$ alors on a :
$(as' - a's)t = 0$, et$(a's'' - a''s')t' = 0$ pour certains $t, t' \in S$. On a donc :

$$(as'' - sa'')s'tt' = as's''tt' - sa's''tt' + sa's''tt' - sa''s'tt' = 0 + 0 = 0.$$

On obtient alors une relation d'équivalence.
On note par $\frac{a}{s}$ la classe d'équivalence de (a, s) qu'on appelle fraction. L'ensemble quotient $A \times S := \{\frac{a}{s}, a \in A, s \in S\}$ sera noté $S^{-1}A$. On définit l'addition et la multiplication par :

$$\frac{a}{s} + \frac{a'}{s'} = \frac{as' + sa'}{ss'}$$

et

$$\frac{a}{s} \times \frac{a'}{s'} = \frac{aa'}{ss'}.$$

On vérifie facilement que $+$ et $\times$ sont bien définies :
Puisque S et une partie multiplicative, $\frac{as'+sa'}{ss'}$ et $\frac{aa'}{ss'}$ sont des élément de $S^{-1}A$.
Si $\frac{a}{s}=\frac{b}{c}$, $\frac{a'}{s'}=\frac{b'}{c'}$, on doit montrer que : $\frac{as'+sa'}{ss'}=\frac{bc'+cb'}{cc'}$ et $\frac{aa'}{ss'}=\frac{bb'}{cc'}$.
$\frac{a}{s}=\frac{b}{c}$ et $\frac{a'}{s'}=\frac{b'}{c'} \Longrightarrow \exists t,t'\in S$ tel que $t(ac-bs)=0$ et $t'(s'c'-s'b')=0$ donc $ts'c'(ac-bs)=0$ et $t'sc(s'c'-s'b')=0$ donc

$$tt'(cc'(as'+sa')-ss'(bc'+cb'))=c's'tt'(ac-sb)+cstt'(c'a'-s'b')=0+0=0.$$

Montrons qu'il existe $\lambda\in S$ tq $\lambda(aa'cc'-ss'bb')=0$. Prenons $\lambda=tt'$,

$$tt'(aa'cc'-ss'bb')=tt'((ac(a'c'-s'b)+(acs'b'-sbs'b'))=tt'(ac(a'c'-s'b'))+tt'(s'b'(ac-sb))=0+0=0.$$

Ainsi, $+$ et $\times$ définissent deux lois de composition internes dans $S^{-1}A$. Les éléments $\frac{0}{1}$ et $\frac{1}{1}$ sont, respectivement, éléments neutres pour l'addition et la multiplication dans $S^{-1}A$. L'ensemble $S^{-1}A$ muni d'une structure d'anneau unitaire et commutatif induite par celle de A.
L'homomorphisme

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & A & \longrightarrow & S^{-1}A \\ & a & \longrightarrow & a/1 \end{array}$$

applique les éléments de S sur les unités de $S^{-1}A$, on dit que φ est $\underline{S-inversant}$. ($\forall s\in S$,$\varphi(s)=\frac{s}{1}$ est inversible dans $S^{-1}A$)

Définition 0.59. *L'anneau $S^{-1}A$ est appelé* $\underline{anneau\ des\ fractions\ de\ A\ par\ rapport\ \text{à}\ S}$.

$S^{-1}A$ possède la propriété universelle suivante :

L'homomorphisme

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & A & \longrightarrow & S^{-1}A \\ & a & \longrightarrow & a/1 \end{array}$$

applique les éléments de S sur les unités de $S^{-1}A$, on dit que φ est $\underline{S-inversant}$.

Définition 0.60. *L'anneau $S^{-1}A$ est appelé* $\underline{anneau\ des\ fractions\ de\ A\ par\ rapport\ \text{à}\ S}$.

$S^{-1}A$ possède la propriété universelle suivante :

Théorème 0.61. *Soient A un anneau et S une partie multiplicative de A. Pour tout anneau unitaire, commutatif B et le morphisme d'anneaux unitaires $f: A\longrightarrow B$ vérifiant $f(S)\subseteq U_B$, il existe un unique homomorphisme :*

$$\overline{f}: S^{-1}A \longrightarrow B$$

tel que $\overline{f}o\varphi=f$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "f"'] & & S^{-1}A \arrow[dl, "\overline{f}"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

Démonstration. Soit $f: A\longrightarrow B$ un homomorphisme $S-$inversant. Considèrons :

$$\begin{array}{rccc} \overline{f}: & S^{-1}A & \longrightarrow & B \\ & \frac{a}{s} & \longrightarrow & \dfrac{f(a)}{f(s)}=f(a).(f(s))^{-1}. \end{array}$$

• Montrons que $\overline{f}$ est bien défini :
Soit $\frac{a}{s}=\frac{a^{'}}{s^{'}}\in S^{-1}A$. On doit montrer que $\overline{f}(\frac{a}{s})=\overline{f}(\frac{a^{'}}{s^{'}})$.

Comme on a $\frac{a}{s}=\frac{a^{'}}{s^{'}}$, alors $(as^{'}-a^{'}s)t=0$ pour un certain $t\in S$ de sorte que $(f(a)f(s^{'})-f(a^{'})f(s))f(t)=0$. Or, comme $f(t)$ est inversible (car f est un homomorphisme S-inversant et $t\in S$), alors $f(a)/f(s)=f(a^{'})/f(s^{'})$ et par suite $f(a)f(s)^{-1}=f(a^{'})f(s^{'})^{-1}$. D'où $\overline{f}(a/s)=\overline{f}(a^{'}/s^{'})$.

• Pour tout $x\in A$, on a $\overline{f}\circ\varphi(x)=\overline{f}(\varphi(x))=\overline{f}((x/1)=f(x)f(1)^{-1}=f(x)1_B=f(x)$. D'où $\overline{f}\circ\varphi=f$.
• Montrons que $\overline{f}$ est unique :

Supposons qu'il existe deux homomorphismes $\overline{f}$ et $\overline{g}$ tels que $\overline{f}\circ\varphi=\overline{g}\circ\varphi=f$. Alors on a :
$*$ $\forall\, x\in A$, $\overline{f}(x/1)=\overline{f}\circ\varphi(x)=\overline{g}\circ\varphi(x)=\overline{g}(x/1)$.
$*$ $\forall\, s\in S$, $\overline{f}(1/s)=f(1)f(s)^{-1}=1_B(f(s))^{-1}=(f(s))^{-1}$.
D'où :

$$\begin{array}{rcl}\overline{f}(x/s) & = & \overline{f}((x/1)(1/s))\\ & = & \overline{f}((x/1))(f(s))^{-1}\\ & = & \overline{g}((x/1))(f(s))^{-1}\\ & = & \overline{g}(x/1)(\overline{g}\circ\varphi(s))^{-1}\\ & = & \overline{g}(x/1)(\overline{g}(s/1))^{-1}\\ & = & \overline{g}(x/1)\overline{g}(1/s)\\ & = & \overline{g}(((x/1)(1/s))\\ & = & \overline{g}(x/s).\end{array}$$

D'où $\overline{g}=\overline{f}$.
Montrons que $\overline{f}$ est un morphisme d'anneaux unitaire.
Soient $\frac{a}{s}$, $\frac{a'}{s'}\in S^{-1}A$, on a

$$\begin{array}{rcl}\overline{f}(\frac{a}{s}+\frac{a'}{s'}) & = & \overline{f}(\frac{as'+a's}{ss'})=f(as'+a's)f(ss')^{-1}\\ & = & f(a)f(s)^{-1}+f(a')f(s')^{-1}\\ & = & \overline{f}(\frac{a}{s})+\overline{f}(\frac{a'}{s'}).\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}\overline{f}(\frac{a}{s}\frac{a'}{s'}) & = & f(aa')f(ss')^{-1}=f(a)f(a')f(s)^{-1}f(s')^{-1}\\ & = & f(a)f(s)^{-1}f(a')f(s')^{-1}\\ & = & \overline{f}(\frac{a}{s})\overline{f}(\frac{a'}{s'}).\end{array}$$

D'autre part, $\overline{f}(\frac{1}{1})=f(1)f(1)^{-1}=1_B$. □

Remarque 0.62. *1. Il est clair que l'homomorphisme $\varphi:A\longrightarrow S^{-1}A$ est injectif si et seulement si S ne contient pas de diviseurs de zéro.*

2. *Si A est un domaine d'intégrité et $S = A\backslash\{0\}$, alors $S^{-1}A$ est le corps des fractions de A.*
3. *Si S est la partie des éléments non diviseurs de zéro, alors $S^{-1}A$ s'appelle l'anneau total des fractions de A noté $T(A)$.*

Exemple 0.63. 1. *Localisation :*

Soit P un idéal premier de A. On a $S = A\backslash P$ est une partie multiplicative de A. Dans ce cas on note $S^{-1}A$ par A_P. Les éléments de a/s où $a \in P$ et $s \in S$ forment un idéal M de A_P. Si $a/s \notin M$ alors $a \notin P$ et par suite $1/a \in A_P$ et donc $s/a \in A_P$. Donc $a/s \in U(A_P)$ de sorte que M est l'unique idéal maximal de A_p. Ainsi on a :

$$M = PA_P = \{a/s\, telque\, a \in P\, et\, s \in S = A\backslash P\}.$$

A_P est appelé anneau local en P ou localisation de A en P.

▶ *Ne pas confondre A/P qui annule tous les éléments de P et A_P qui inverse tous les éléments de $A\backslash P$.*

2. *Soit $0 \neq s \in A$ tel que s est non nilpotent (sinon $0 \in S$). L'ensemble $S = \{s^n/\, n \in \mathbb{N}\}$ est une partie multiplicative de A. En particulier si $A = \mathbb{Z}$ et $s = 10$, alors $S^{-1}A = \mathbb{D}$ est l'anneau des nombres décimaux.*

Proposition 0.64. *Soient A un anneau et S une partie multiplicative de A.*

1. *Si I est un idéal de A, l'ensemble des fractions a/s où $a \in I$ et $s \in S$ est l'idéal de $S^{-1}A$ engendré par $\varphi(I)$ et est noté $S^{-1}I$ (ou I_S) :*
$$S^{-1}I = \{\frac{a}{s}; a \in I\, et\, s \in S\}.$$
2. *Soit I un idéal propre de A. On a :*
$$I_S \neq S^{-1}A \Longleftrightarrow S \cap I = \emptyset.$$
3. *Soient I_1 et I_2 deux idéaux de A. Alors on a :*
$$S^{-1}(I_1I_2) = S^{-1}I_1.S^{-1}I_2.$$
4. *Pour tout idéal J de $S^{-1}A$, on a :*
$$S^{-1}(\varphi^{-1}(J)) = J.$$
5. *Pour tout idéal I de A, on a :*
$$(I_S)_S \supseteq I.$$
On obtient l'égalité si et seulement si aucun élément de S n'est diviseur de zéro modulo A/I.
6. *Les idéaux premiers de $S^{-1}A$ sont en correspondance bijective avec les idéaux premiers de A ne rencontrant pas S.*

Démonstration. 1) Soient $\frac{a}{s}$ et $\frac{a'}{s'}$ dans I_S, $a, a' \in I$. On a $\frac{0}{1} \in I_S$ et $\frac{a}{s} - \frac{a'}{s'} = \frac{as'-a's}{ss'} \in I_S$. Soit $\frac{a''}{s''} \in S^{-1}A$, $\frac{a}{s}.\frac{a'}{s'} = \frac{aa'}{ss'} \in I_S$, donc I_S est un idéal de $S^{-1}A$.

Montrons que $I_S = (\varphi(I)) = \{_{finie}\dfrac{a_i}{1}\dfrac{x_i}{s_i}, a_i \in I, \dfrac{x_i}{s_i} \in S^{-1}A\}$. Soit $\frac{a}{s} \in I_S$, alors $\frac{a}{s} = \frac{a}{1}.\frac{1}{s}$, $\frac{a}{1} = \varphi(a)$ et $\frac{1}{s} \in S^{-1}A$, d'où $I_S \subseteq (\varphi(I))$

Soit $x \in (\varphi(I))$, alors $x = \displaystyle\sum_{finie} \frac{a_i}{1}\frac{x_i}{s_i}$, $\frac{a_i}{1} \in (\varphi(I))$ et $\frac{b_i}{s_i} \in S^{-1}A$. On a $a_i \in I$ et $b_i \in A \Longrightarrow a_ib_i \in I$ donc $\frac{a_ib_i}{s_i} \in I_S$, d'où $x \in I_S$ donc $\varphi(I) \subseteq I_S$.

2) Montrons que $I_S \neq S^{-1}A \Longleftrightarrow S \cap I = \emptyset$. $I_S \neq S^{-1}A \Longrightarrow S \cap I = \emptyset$. Sinon $\exists s \in I \cap S$ donc $\frac{s}{s} \in I_S$ c-à-d $1 \in I_S$. D'où, $I_S = S^{-1}A$. Inversement, si $S \cap I = \emptyset \Longrightarrow I_S \not{S}^{-1}A$. Sinon, $I_S = S^{-1}A$ implique que $\frac{1}{1} \in S^{-1}I \Longleftrightarrow \exists(a,s) \in S \times A, \frac{a}{s} = \frac{1}{1}$. $\frac{a}{s} = \frac{1}{1} \Longleftrightarrow \exists t \in S, ta = ts$ donc $ts \in I \cap S \Longrightarrow I \cap S \neq \emptyset$, absurde.

3) Soit $\frac{a}{s} \in (IJ)_S$. On suppose $a \in IJ$ donc $a = \displaystyle\sum_{finie} x_iy_i$ $\frac{a}{s} = \displaystyle\sum_{finie} \frac{x_iy_i}{1s} \in I_SJ_S \Longrightarrow (IJ)_S \subseteq I_SJ_S$.

Soit $x \in I_SJ_S$ tel que $x = \sum_{finie} \frac{a_ib_i}{s_it_i}$, $\frac{a_i}{s_i} \in I_S$ et $\frac{b_i}{t_i} \in J_S$. On alors $x = \dfrac{\sum_{finie} a_ib_i \prod s_it_i}{\prod s_it_i} \in (IJ)_S$, donc $I_SJ_S \subseteq IJ)_S$.

4) Montrons que pour tout idéal J de $S^{-1}A$, on a $S^{-1}(\varphi^{-1}(J)) = J$. $S^{-1}(\varphi^{-1}(J)) = (\varphi\varphi^{-1}(J))$, or $\varphi \circ \varphi^{-1}(J) \subseteq J$, donc $S^{-1}(\varphi^{-1}(J)) = (\varphi \circ \varphi^{-1}(J)) \subseteq J$. Inversement, soit $\frac{x}{b} \in J$, alors $\frac{x}{1} = \frac{x}{1}.\frac{b}{1} \in J$. Ainsi, $x = \varphi^{-1} \in \varphi^{-1}(J)$, d'où $\frac{x}{b} \in S^{-1}\varphi(J))$. Ainsi, $J \subseteq S^{-1}\varphi^{-1}(J)$.

6) Soit

$$\begin{array}{llll} f: & \{\textit{idéaux premiers } Q \textit{ de } A \ / \ S \cap Q = \emptyset\} & \longrightarrow & \{\textit{idéaux premiers de } S^{-1}A\} \\ & Q & \longmapsto & S^{-1}Q \end{array}$$

• On vérifie que f est une application. En effet, $S^{-1}Q$ est un idéal de $S^{-1}A$ d'après 1). D'autre part, comme on a $Q \cap S = \emptyset$, alors $S^{-1}Q \neq S^{-1}A$; c'est à dire que $S^{-1}Q$ est un idéal propre de $S^{-1}A$ d'après 2).

• Montrons que f est bien définie :

Soit Q un idéal premier de A tel que $S \cap Q = \emptyset$. On doit montrer que $S^{-1}Q$ est un idéal premier de $S^{-1}A$. Soient $x, y \in S^{-1}A$ tels que $xy \in S^{-1}Q$ et montrons que x ou $y \in S^{-1}Q$. Posons $x = a/s$ et $y = b/t$ où $a, b \in A$ et $s, t \in S$. On a $(a/s)(b/t) \in S^{-1}Q$ c'est à dire que $(ab)/(st) \in S^{-1}Q$, et par suite on a $(ab)/(st) = c/\mu$ où $c \in Q$ et $\mu \in S$.

Donc $(\mu ab - cst)\lambda = 0$ pour un certain $\lambda \in S$ de sorte que $\lambda\mu ab = cst\lambda \in Q$. Or $Q \cap S = \emptyset$, d'où λ et $\mu \notin Q$. Ainsi $ab \in Q$ et donc $a \in Q$ ou $b \in Q$ puisque Q est un idéal premier de A. Ainsi on a $x = a/s \in S^{-1}Q$ ou $y = b/t \in S^{-1}Q$, et donc $S^{-1}Q$ est premier. Cela implique que f est bien définie.

• f est clairement surjective. En effet, soit N un idéal premier de $S^{-1}A$ et $\varphi^{-1}(N)$ l'idéal premier de A. On a $S^{-1}(\varphi^{-1}(J)) = N$ d'après 4). Posons alors. $Q = \varphi^{-1}(N)$. On a donc $f(Q) = S^{-1}Q = S^{-1}(\varphi^{-1}(N)) = N$.

• f est injective :

Soient P et Q deux idéaux premiers de A tels que $P \cap S = Q \cap S = \emptyset$ et $f(P) = f(Q)$; c'est à dire que $S^{-1}P = S^{-1}Q$. On doit montrer que $P = Q$.

Soit $x \in P$. On a $x/1 \in S^{-1}P = S^{-1}Q$, et par suite on a $x/1 = a/s$ où $a \in Q$ et $s \in S$. Donc $(sx - a)t = 0$ pour un certain $t \in S$, d'où $stx = at \in Q$. Or $s, t \notin Q$, alors $x \in Q$, ce qui montre que $P \subseteq Q$. De même on montre que $Q \subseteq P$ et par suite $P = Q$, d'où f est injective. Enfin f est bijective et cela achève la preuve. ■

□

Théorème 0.65. *Soit P un idéal premier d'un anneau unitaire commutatif A alors le localisé de A en P, noté A_P est un anneau local, dont l'unique idéal maximal est P_S, où $S = A \backslash P$.*

Démonstration. P est premier dans A et $P \cap S = \emptyset$, donc $S^{-1}P \in Sepc(A_P)$. A_P est un anneau unitaire, commutatif donc il contient au moins un idéal maximal M. M est premier, donc il existe $Q \in Spec(A)$, $Q \cap S = \emptyset$ tel que $M = Q_S$ or $Q \cap S = \emptyset$ et $S = A \backslash P \Longrightarrow Q \subseteq P \Longrightarrow M = Q_S \subseteq P_S$. Donc, $M = P_S$.
Soit $\frac{a}{s} \in A_p \setminus M \Longrightarrow a \notin P \Longrightarrow a \in S$. $\frac{a}{s} = \frac{a}{1} . \frac{1}{s}$ inversible car $\varphi(S) \subseteq U_{S^{-1}A}$ ($\frac{a}{s} \frac{s}{a} = \frac{1}{1}$).

□

Proposition 0.66. *Soient I un idéal d'un anneau commuatif unitaire A et S une partie multiplicative de A. Alors $\pi(S) = \overline{S}$ est une partie multiplicative de A/I et $S^{-1}A/S^{-1}I \simeq \overline{S^{-1}}(A/I)$.*

Bibliographie

[1] M. F. Atiyah, I. G. Macdonald (1969), Introduction to commutative algebra, AddisonŰWesley.

[2] Josette Calais(2006), Eléments de théorie des anneaux-Anneaux commutatifs, Ellipses.

[3] Najib Mahdou(2013), Introduction à l'Algèbre Homologique, IPNPUB Fez, Morocco.