Dans ce qui suit, un anneau est toujours commutatif et possède un élément unité, noté en général 1.

Exercice 1. Soit A un anneau et $(I_n)_{n>0}$ une suite croissante d'idéaux de type fini. Montrer que $I = \bigcup_{n>0} I_n$ est de type fini si et seulement si la suite est stationnaire.

Exercice 2.
1. Soient A et B deux anneaux tel que A est Noethérien, $\phi \in Hom(A, B)$ surjectif. Montrer que B est noethérien.
2. Soit A un anneau. Si $A[X]$ est Noethérien. Montrer que A est Noethérien.
3. Montrer que les anneaux suivants sont Noethérien :
   a $\mathbb{Z}[i] = \{a + ib; (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$,
   b l'anneau des fractions rationnelles n'ayant pas de pôle sur le cercle unitaire.

Exercice 3. Soit A un anneau et I un idéal de A.
1. Soit $a \in A$. Montrer que si $I + (a)$ et $(I : a)$ est de type fini alors I est de type fini.
2. Soit $E = \{I \text{ idéal de } A, \quad I \text{ n'est pas de type fini}\}$. Montrer que si $E \neq \emptyset$ alors possède un éléments maximal et que cet élément est premier.
3. Déduire que : A est Noethérien si et seulement si tout idéal premier est de type fini.

Exercice 4. Soient M un A-module Noethérien et ϕ un endomorphisme de M. Montrer qu'il existe un entier n tel que $Ker\phi^n \cap Im\phi^n = \{0\}$.

Exercice 5. Soit A un anneau intègre et Noethérien. On suppose que A admet un unique idéal maximal M et que cet idéal est engendré par un élément non nul a.
1. Montrer que $u \in U_A$ si et seulement si $u \notin m$.
2. Montrer que tout élément non nul x de A s'écrit d'une manière unique sous la forme $x = ua^n$ où $u \in U_A$ et $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6. Soit A un sous-anneau d'un anneau B sur lequel B est entier sur A. Soit S une partie multiplicative de A. Montrer que $S^{-1}B$ est entier sur $S^{-1}A$.

Exercice 7. Soit A un sous-anneau d'un anneau B sur lequel B est entier sur A.
1. Supposons que B est un D.I, montrer que : A est un corps si et seulement si B est un corps.
2. Soit Q un idéal premier de B. Montrer que Q est maximal si et seulement $A \cap Q$ est maximal.

Exercice 8. Montrer que la courbe paramétrée C donnée par

$$\begin{cases} x(t) = t\,; \\ y(t) = t^2\,; \\ z(t) = t^3. \end{cases}$$

$t \in K$, est algébrique.