Exercice 1. Soient M un A-module à gauche, $m \in M$ et $a \in A$. Montrer que :

1. $0_A m = 0_M$;
2. $(-1_A)m = -m$;
3. $a0_M = 0_M$.

Exercice 2. 1. Soient A un anneau unitaire et M un A-module à gauche. L'annulateur de M dans A est l'ensemble :

$$(0 : M) = \{a \in A; am = 0, \forall m \in M\}.$$

a Montrer que $(0 : M)$ est un idéal bilatère de A.

b Soit N un sous-module de M. Montrer que l'ensemble $(N : M) = \{a \in A; am \in N, \forall m \in M\}$ est un idéal bilatère de A.

2. Soient A un D.I et M un A-module. On dit que $x \in M$ est de torsion si $(0 : x) \neq \{0\}$. On note $T(M)$ l'ensemble des éléments de torsion de M. Si $T(M) = \{0\}$, on dit que M est sans torsion.

a Dans le $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, déterminer $(0 : 2)$, $(0 : 3)$ et $(0 : 5)$.

b Soient les $\mathbb{Z}$-modules $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Déterminer $T(\mathbb{Z})$ et $T(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$.

3. Montrer que $T(M)$ est un sous-module de M. Donner un contre-exemple lorsque l'hypothèse que A est un anneau intègre n'est pas vérifiée.
4. Montrer que $M/T(M)$ est sans torsion.
5. Montrer que si $f \in Hom_A(M, N)$, alors $f(T(M)) \subset T(N)$. Donner un exemple ou l'inclusion est stricte.
6. On suppose de plus dans cette question que f est injectif. Soit $g \in Hom_A(N, P)$ tel que $Ker(g) = Imf$. Montrer que $Ker(g) \cap T(N) = f(T(M))$.

Exercice 3. Soit M un A-module et $m \in M$ un élément dont l'annulateur est réduit à $\{0\}$. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

1. mA possède un supplémentaire dans M ;
2. il existe $f \in Hom(M, A)$ tel que $f(m) = 1$.

Montrer qu'alors $M = mA \oplus Kerf$.

Exercice 4. Montrer qu'un idéal non nul d'un anneau A est un sous-module libre de A si, et seulement si, I est principal et engendré par un élément non diviseur de zéro de A.

Exercice 5. Soient A un anneau, M un A-module et N un sous-module. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

1. N possède un supplémentaire dans M ;
2. N est le noyau d'un projecteur de M ;
3. N est l'image d'un projecteur de M.

Exercice 6. Soient L et M deux A-modules et $f \in Hom_A(L, M)$.

1. Soit N un sous-module de M de type fini. Montrer que si M/N est de type fini alors M est de type fini.
2. On suppose que $Kerf$ et Imf sont de type fini. Montrer que L est de type fini.
3. On suppose que $kerf \simeq A^p$ et $Imf \simeq A^q$. Montrer que $L \simeq A^{p+q}$.

Exercice 7. 1. Soit M un sous-$\mathbb{Z}$-module de $\mathbb{Q}$ de type fini. Montrer que M est libre de rang 0 ou de rang un. En particulier, le $\mathbb{Z}$-module Q n'est pas de type fini.

2. Quelles sont les parties libres maximales de $\mathbb{Q}$?
3. Le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Q}$ possède-t-il des parties génératrices minimales ?