Exercice 1. Montrer que :

1. si B est un sous-anneau unitaire de A alors A et B ont même caractéristique.
2. la caractéristique d'un domaine d'intégrité est soit nulle, soit un nombre premier.
3. si la caractéristique d'un anneau est nulle, alors il est infini.
   Soit p un nombre premier
4. si A est un anneau unitaire de caractéristique p alors pour tous éléments x et y dans A on a :
   a $(x+y)^p = x^p + y^p$.
   b $(xy)^p = x^p y^p$

Exercice 2. Etablir les isomorphismes suivantes :

1. $\mathbb{Z}[X]/(3, X) \simeq \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.
2. $\mathbb{Z}[X]/6\mathbb{Z} \simeq (Z/6\mathbb{Z})[X]$.

Exercice 3. Soit A un anneau commutatif et I un idéal de A. On note $I[X]$ l'ensemble des polynômes à une indéterminer et à coefficients dans I.

1. Montrer que $I[X]$ est un idéal de $A[X]$ et que $A[X]/I[X] \simeq (A/I)[X]$
2. Montrer que $I[X]$ est premier dans $A[X]$ si et seulement si I est un idéal premier de A.

Exercice 4. Soit A un anneau unitaire, commutatif. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

i) $Spec(A) = \{P\}$;

ii) Tout élément de A est soit inversible soit nilpotent ;

iii) $A/N(A)$ est un corps.

Exercice 5.
1. Soit K un corps. Montrer que les idéaux premiers de $K[X]$ sont les (P) avec P irréductible dans $K[X]$.
2. Déterminer tous les idéaux premiers de : $\mathbb{C}[X]$, $\mathbb{R}[X]/(X^2+X+1)$ et $\mathbb{C}[X]/(X^2-1)$.

Exercice 6. Soit A un anneau unitaire, commutatif. Pour toute partie E de A, on pose

$$V(E) = \{P \in Spec(A); E \subseteq P\}.$$

1. Soit $< E >$ l'idéal engendré par E. Montrer que $V(E) = V(< E >) = V(\sqrt{< E >})$.
2. Déterminer $V(\{0\})$ et $V(\{1\})$.
3. Si $(E_i)_{i\in I}$ une famille non vide de parties de A, prouver que $V(\bigcup_{i\in I} E_i) = \bigcap_{i\in I} V(E_i)$.
4. Démontrer que, quels que soient les idéaux I et J de A, on a : $V(I\cap J) = V(IJ) = V(I) \cup V(J)$.
5. Conclure.

Exercice 7. Soit A un D.I. Pour tout $P \in Spec(A)$, A_P désigne le localisé de A en P.
Soient $\frac{x}{y} \in \bigcap_{P\in Spec(A)} A_P$ et $J = \{\alpha \in A; \alpha x \in Ay\}$.

1. Vérifier que J est un idéal de A.
2. Montrer que pour tout $P \in Spec(A)$, $J \nsubseteq P$.
3. Déduire que $1 \in J$.

4. Déduire que $\bigcap\limits_{P \in Spec(A)} A_P = A$.

Exercice 8. Supposons que A soit un produit fini d'anneaux A_i : on a $A = A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$.

1. Montrer que les idéaux de A sont de la forme $I_1 \times I_2 \times ... \times I_n$, I_j est un idéale de A_j.
2. Déterminer les idéaux premiers et maximaux de A.
3. Supposons de plus que les A_i soient des corps. Montrer que A n'a qu'un nombre fini d'idéaux.

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{C}[X,Y] \longrightarrow \mathbb{C}[X]$, tel que $f(P) = P(X, X^2)$.

1. Vérifier que f est un morphisme d'anneaux surjectif.
2. Montrer que $Ker f = (Y - X^2)$.
3. Déduire que $\mathbb{C}[X,Y]/(Y - X^2)$ est un anneau principal.

Exercice 10. Soit S une partie multiplicative de A. Montrer que :

1. $S^{-1}A$ n'est pas nul.
2. si A est un D.I, alors $S^{-1}A$ est un D.I.
3. si $N(A) = \{0\}$, alors $N(S^{-1}A) = \{0\}$.
4. $N(S^{-1}A) = S^{-1}N(A)$.

Exercice 11. (Facultatif)

On se donne deux réels $a < b$ et $A = C([a,b], \mathbb{R})$ est la $\mathbb{R}$-algèbre des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On munit cette algèbre de la norme de la convergence uniforme $\parallel f \parallel_\infty = \sup\limits_{x \in [a,b]} \mid f(x) \mid$.

1. L'anneau A est-il intègre ?
2. Pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, montrer que tout morphisme d'anneau φ_{x_0} de A dans $\mathbb{R}$ est de la forme $f \longrightarrow \varphi_{x_0}(f) = f(x_0)$.
3. Montrer que, pour tout réel $x \in [a,b]$ l'ensemble $I_x = \{f \in A, f(x) = 0\}$ est un idéal maximal de A.
4. Montrer qu'un idéal maximal de A est fermé.
5. Soit I un idéal maximal de A. Montrer que l'ensemble :
$$Z(I) = \{x \in [a,b], \forall f \in I, f(x) = 0\}$$
est un fermé non vide de $[a,b]$.
6. Montrer que les idéaux maximaux de A sont les I_x où $x \in [a,b]$.

Exercice 12. (Facultatif)

1. Montrer que le polynôme $X^2 + 2X + 2$ divise le polynôme $X^4 + 4$ dans $\mathbb{Z}[X]$
2. Montrer que le polynôme $X^2 + 2X + 2$ est irréductible dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[X]$
3. En déduire la décomposition du polynôme $X^4 + 1$ dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[X]$ en produit de polynôme irréductible.
4. On pose $I = (X^2+2X+2)\mathbb{R}[X]$, $J = (X^2-2X+2)\mathbb{R}[X]$ et $K = (X^4+4)\mathbb{R}[X]$. Montrer que $I + J = \mathbb{R}[X]$. En déduire que $\mathbb{R}[X]/I \times \mathbb{R}[X]/J \simeq \mathbb{R}[X]/K$.
5. On pose $H = (Y^2 + 2Y + 1)\mathbb{R}[Y]$. Montrer que $\mathbb{R}[Y]/H \simeq \mathbb{R}[X]/J$.

Théorème(Lemme Chinois)

Soient I et J deux idéaux étrangés d'un anneau commutatif unitaire. Alors L'homomorphisme canonique

$$\begin{array}{rccc} f: & A & \longrightarrow & (A/I) \times (A/J) \\ & a & \longmapsto & (a+I, a+J) \end{array}$$

induit un isomorphisme d'anneaux $\widetilde{f}$ de $A/(I.J)$ sur $(A/I) \times (A/J)$, c-à-d

$$A/(I.J) \simeq (A/I) \times (A/J).$$