Exercice 1. Soient I, J et L des idéaux d'un anneau unitaire commutatif A.

1. Montrer que :
   $I.J \subseteq I \cap J$;
   $(I.J) + (I.L) = I.(J + L)$;
   $(I \cap J) + (I \cap L) \subseteq I \cap (J + L)$.
2. Donner un exemple où $I.J \neq I \cap J$.
3. Si $I + J = A$, montrer que $IJ = I \cap J$.
4. On suppose que A est un anneau dans lequel, pour deux idéaux quelconques I et J, on a l'égalité
$$I.J = I \cap J \qquad (1).$$
   a. Montrer que $(I \cap J) + (I \cap L) = I \cap (J + L)$.
   b. Montrer que A vérifie la condition (1) si et seulement si, pour tout idéal de A, on a $I^2 = I$.
   c. Vérifier que l'anneau de Boole est un anneau vérifiant la condition (1).
   d. Si A est un domaine d'intégrité vérifiant la condition (1) ; montrer que A est un corps.
   e. Montrer que si A vérifiant (1), tout idéal premier est maximal.
5. Si $J \subseteq I$, alors $J + (I \cap L) = I \cap (J + L)$.

Exercice 2.
1. Montrer que tout domaine d'intégrité fini A est un corps.
2. Montrer que tout domaine d'intégrité A qui possède un nombre fini des idéaux est un corps.
3. Montrer que si A est un domaine d'intégrité, alors $A[X]$ est aussi un domaine d'intégrité.

Exercice 3. Soit A un anneau, B un sous-anneau de A et I un idéal de A. Montrer que si $I \cap B = \{0\}$ alors $B \simeq A/I$.

Exercice 4.
1. Soit $n \geqslant 2$. Montrer que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est intègre si et seulement si n est un nombre premier.
2. Résoudre dans $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ l'équation $x^2 = 1$.
3. Résoudre dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ l'équation $x^2 = 1$.

Exercice 5. Soient I et J des idéaux d'un anneau unitaire commutatif A. On suppose que $I + J = A$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I^n + J^n = A$.

Exercice 6. Soit I un idéal d'un anneau commutatif A. On note $\sqrt{I} = \{a \in A; \exists n \in \mathbb{N}^*, a^n \in I\}$.

1. Montrer que $\sqrt{I}$ est un un idéal de A. que vaut $\sqrt{\{0\}}$?
2. Soient I, J et L des idéaux de A. Montrer que :
   a si $I \subseteq J$ alors $\sqrt{I} \subseteq \sqrt{J}$;
   b $\sqrt{IJ} = \sqrt{I \cap J}$;
   c $\sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$;
   d $\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$.
3. Si I un idéal premier de A. Prouver que $\sqrt{I} = I$.
4. Soient $(I_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ des idéaux premiers de A. Supposons que $I \subseteq \displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} I_i \subseteq \sqrt{I}$. Montrer que $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} I_i = \sqrt{I}$.

Exercice 7. Soit A un anneau unitaire commutatif.

1. Soit $x \in A$ nilpotent. Montrer que $1 + x$ est inversible dans A.
2. Montrer que si a est nilpotent et b inversible alors $a + b$ est inversible.
3. Soit $f = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in A[X] \setminus \{0\}$.
   Montrer que si a_0 est inversible et a_i, $i = 1, ..., n$, est nilpotent, alors f est inversible.

4. Soit $g = \sum_{i=0}^{m} b_i X^i$ et $fg = 1$.

   a Montrer que a_0 est inversible.

   b Montrer par récurrence sur k, $0 \leqslant k \leqslant m$, que $a_n^{k-1} b_{m-k} = 0$.

   c Prouver que pour tout i, $0 \leqslant i \leqslant n$, a_i est nilpotent.

5. Montrer que f est nilpotent si et seulement, si tous les a_i sont nilpotents.
6. Vérifier que $N(A[X]) = N(A)[X]$.
7. Montrer que $N(A[X]) = J(A[X])$.

Exercice 8. Soit $f \in Hom(A, B)$, un morphisme d'anneaux unitaires commutatifs.

1. Montrer que $f^{-1} = (I)$ est un idéal premier de A contenant $Kerf$, où I est un idéal premier de B.
2. Supposons que f est surjectif, montrer que quel que soit l'idéal premier I de A contenant $Kerf$, $f(I)$ est un idéal premier de B.