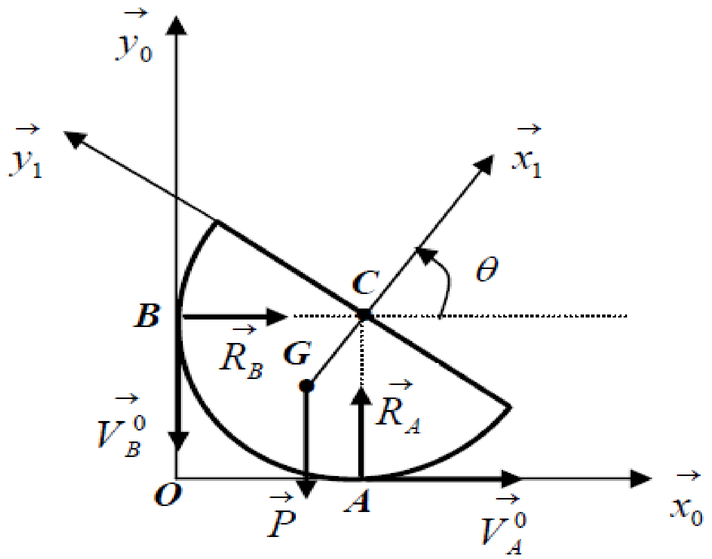
UCA - Marrakech -FP –Safi Année Universitaire 19/20
Mécanique du solide

Planche 6 : Energétique des solides

Problème :



Solution :

1. Vitesse et accélération absolue du points G dans R_0 et R_1 ;

A partir du vecteur position du point G nous déduisons la vitesse et l'accélération :

Nous avons : $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CG} = \begin{cases} R \\ R+ \\ 0 \end{cases}_{R_0} \begin{cases} -a\cos\theta \\ -a\sin\theta = \\ 0 \end{cases}_{R_0} \begin{cases} R - a\cos\theta \\ R - a\sin\theta \\ 0 \end{cases}_{R_0}$, $\overrightarrow{CG} = \begin{cases} -a \\ 0 \\ 0 \end{cases}_{R_1}$

$\vec{\Omega}_1^0 = \dot{\theta}\vec{z}_0 = \dot{\theta}\vec{z}_1$

Dans le repère R_0 :

$$\vec{V}^0(G) = \frac{d^0\overrightarrow{OG}}{dt} = \begin{cases} a\dot{\theta}\sin\theta \\ -\dot{\theta}a\cos\theta \\ 0 \end{cases}_{R_0} \Rightarrow \vec{\gamma}^0(G) = \frac{d^0\vec{V}^0(G)}{dt} = \begin{cases} a\left(\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta\right) \\ -a\left(\ddot{\theta}\cos\theta + \dot{\theta}^2\sin\theta\right) \\ 0 \end{cases}_{R_0}$$

Dans le repère R_1 :

$$\vec{V}^0(G)=\frac{d^0\,\overrightarrow{CG}}{dt}=\frac{d^1\,\overrightarrow{CG}}{dt}+\vec{\Omega}_1^0\wedge\overrightarrow{CG}=\begin{cases}0\\0\\\dot{\theta}\end{cases}_{R_1}\wedge\begin{cases}-a\\0\\0\end{cases}_{R_1}=\begin{cases}0\\-a\dot{\theta}\\0\end{cases}_{R_1}$$

$$\vec{\gamma}^0(G)=\frac{d^0\,\vec{V}^0(G)}{dt}=\frac{d^1\,\vec{V}^0(G)}{dt}+\vec{\Omega}_1^0\wedge\vec{V}^0(G)=\begin{cases}0\\-a\ddot{\theta}\\0\end{cases}_{R_1}\begin{cases}0\\0\\\dot{\theta}\end{cases}_{R_1}\wedge\begin{cases}0\\-a\dot{\theta}\\0\end{cases}_{R_1}=\begin{cases}a\dot{\theta}^2\\-a\ddot{\theta}\\0\end{cases}_{R_1}$$

2.

. **Réactions R_A et R_B en fonction de $\theta,\dot{\theta}$ et $\ddot{\theta}$ par le théorème de la résultante dynamique**

La résultante des forces extérieures appliquées au solide est égale à la masse du solide par l'accélération de son centre d'inertie :

$$\sum_i \vec{F}_i=m\vec{\gamma}^0(G)\quad\Leftrightarrow\quad\vec{R}_A+\vec{R}_B+m\vec{g}=m\vec{\gamma}^0(G)\qquad\textbf{(1)}$$

Projetons l'équation **(1)** sur les axes du repère R_0

$$R_B=ma\left(\ddot{\theta}\sin\theta+\dot{\theta}^2\cos\theta\right)\qquad\textbf{(2)}$$

$$R_A-mg=-ma\left(\ddot{\theta}\cos\theta+\dot{\theta}^2\sin\theta\right)\quad\Leftrightarrow\quad R_A=mg-ma\left(\ddot{\theta}\cos\theta+\dot{\theta}^2\sin\theta\right)\qquad\textbf{(3)}$$

3.

Equation différentielle de mouvement de la demi sphère en utilisant le théorème du moment dynamique

Le moment résultant des forces extérieures est égal au moment dynamique du solide au même point ***C***.

$$\sum_i \vec{M}_i(\vec{F}_{ext})/_C=\vec{\delta}_C(S/R_0)\quad\Leftrightarrow\quad\overrightarrow{CA}\wedge\vec{R}_A+\overrightarrow{CB}\wedge\vec{R}_B+\overrightarrow{CG}\wedge m\vec{g}=\vec{\delta}_C(S/R_0)$$

Le moment dynamique est égal à la dérivée du moment cinétique :

$\vec{\delta}_C(S/R_0)=\dfrac{d^0\,\vec{\sigma}_C(S/R_0)}{dt}$, le moment cinétique au point ***C*** est donné par :

$$\vec{\sigma}_C(S/R_0)=I_{C/R_1}.\vec{\Omega}_1^0=\begin{bmatrix}A&0&0\\0&A&0\\0&0&A\end{bmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\\dot{\theta}\end{pmatrix}=A\dot{\theta}\,\vec{z}_0=A\dot{\theta}\,\vec{z}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\A\dot{\theta}\end{pmatrix}_{R_0,\,R_1}$$

$$\vec{\delta}_C(S/R_0) = \frac{d^0\,\vec{\sigma}_C(S/R_0)}{dt} = A\ddot{\theta}\,\vec{z}_0$$

$\overrightarrow{CA}\wedge\vec{R}_A + \overrightarrow{CB}\wedge\vec{R}_B + \overrightarrow{CG}\wedge m\,\vec{g} = \vec{\delta}_C(S/R_0)$ comme : $\overrightarrow{CA}\,//\,\vec{R}_A$ *et* $\overrightarrow{CB}\,//\,\vec{R}_B$ alors :

$\overrightarrow{CG}\wedge m\,\vec{g} = \vec{\delta}_C(S/R_0) \Leftrightarrow {}_{R_0}\begin{pmatrix} -a\cos\theta \\ -a\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} \wedge {}_{R_0}\begin{pmatrix} 0 \\ -mg \\ \end{pmatrix} = {}_{R_0}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ A\ddot{\theta} \end{pmatrix}$ d'où : $mga\cos\theta = A\ddot{\theta}$

ce qui donne : $\ddot{\theta} = \dfrac{mga}{A}\cos\theta$ **(4)**

4.

Equation de mouvement avec les conditions : $\theta(0) = 0$ **et** $\dot{\theta}(0) = 0$ **;**

On multiplie l'équation (4) par : $\dot{\theta}$, puis on intègre

$$\dot{\theta}\ddot{\theta} = \frac{mga}{A}\dot{\theta}\cos\theta \quad\Rightarrow\quad d\left(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2\right) = \frac{mga}{A}d(\sin\theta)$$

$\displaystyle\int_0^{\dot{\theta}} d\left(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2\right) = \frac{mga}{A}\int_0^{\theta} d(\sin\theta) \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = \frac{mga}{A}\sin\theta$ on déduit alors :

$\dot{\theta}^2 = 2\dfrac{mga}{A}\sin\theta$ **(5)**

5.

Expression de $\dot{\theta}^2$ **en utilisant la conservation de l'énergie mécanique totale :**

$$E_C + E_P = E_{C0} + E_{P0} = Cte \quad\Rightarrow\quad E_C - E_{C0} = -(E_P - E_{P0})$$

$$E_C = \frac{1}{2}\vec{\Omega}_1^0\,.I_{C/R_1}.\vec{\Omega}_1^0 = \frac{1}{2}A\dot{\theta}^2 \quad ; \quad E_{C0} = 0$$

$$-(E_P - E_{P0}) = \int_0^{\theta} m\,\vec{g}\bullet d\,\overrightarrow{OG} = m\int_0^{\theta}\begin{pmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} a\sin\theta d\theta \\ -a\cos\theta d\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \int_0^{\theta} mga\cos\theta d\theta = mga\sin\theta$$

$$E_C - E_{C0} = -(E_P - E_{P0}) \quad\Rightarrow\quad \frac{1}{2}A\dot{\theta}^2 = mga\sin\theta \quad\Leftrightarrow\quad \dot{\theta}^2 = 2\frac{mga}{A}\sin\theta$$

On retrouve ainsi l'expression de $\dot{\theta}^2$.

6.

. Expressions des réactions N_A , N_B et de l'angle limite θ_l pour lequel la demi sphère pleine quitte le mur.

Il suffit de remplacer les expression de $\dot{\theta}$ et de $\ddot{\theta}$ dans celles de R_A et R_B :

$$R_B = ma\left(\frac{mga}{A}\cos\theta\sin\theta + 2\frac{mga}{A}\sin\theta\cos\theta\right) = 3\frac{m^2ga^2}{A}\sin\theta\cos\theta$$

$$R_A = mg - ma\left(\frac{mga}{A}\cos\theta\cos\theta + 2\frac{mga}{A}\sin\theta\sin\theta\right) = mg - \frac{m^2ga^2}{A}\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)$$

$$R_A = mg - \frac{m^2ga^2}{A}\cos 2\theta$$

La demi sphère quitte le mur si : $R_B = 0 \quad \Leftrightarrow \sin\theta\cos\theta \;= 0 \quad \Rightarrow \begin{cases}\theta = 0 \\ \theta = \dfrac{\pi}{2}\end{cases} \Rightarrow \quad \theta = \dfrac{\pi}{2}$