UCA - Marrakech -FP –Safi -Année Universitaire 19/20
Mécanique du solide

Planche 5 : PFD

Problème 1

<u>Etude du mouvement</u> :

Le mouvement de la sphère (S) est dans le plan : $(\mathbf{O}, \vec{\imath}_0, \vec{\jmath}_0)$

La liaison (holonome) de contact impose : $y_G = r$

Le mouvement de la sphère (S) dépend donc de deux paramètres : x_G et φ

<u>PFD appliqué à la sphère en mouvement dans $(\mathcal{R}_0)$:</u>

$$[\boldsymbol{D}(\boldsymbol{S}/\mathcal{R}_0)] = [\boldsymbol{F}_{ext}(\boldsymbol{S})]$$

<u>Torseur des actions mécaniques extérieures à la sphère :</u>

$$[\mathcal{F}_{ext}(\boldsymbol{S})]_G = {}_G\begin{Bmatrix} \vec{\boldsymbol{R}}_{ext} \\ \vec{\boldsymbol{M}}_{G,ext} \end{Bmatrix}$$

Les forces extérieures agissant sur la sphère :

Poids de la sphère : $\vec{\boldsymbol{P}} = \boldsymbol{m}\vec{\boldsymbol{g}} = \boldsymbol{mgsin\alpha}\,\vec{\imath}_0 - \boldsymbol{mgcos\alpha}\vec{\jmath}_0$

La force de contact : $\vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{N}} + \vec{\boldsymbol{T}} = \boldsymbol{N}\,\vec{\jmath}_0 + \boldsymbol{T}\,\vec{\imath}_0$

(T étant une grandeur algébrique qui peut-être > 0 ou < 0)

<u>Résultante générale</u>

$$\vec{\boldsymbol{R}}_{ext} = \vec{\boldsymbol{P}} + \vec{\boldsymbol{R}} = (\boldsymbol{mgsin\alpha} + \boldsymbol{T})\vec{\imath}_0 + (-\boldsymbol{mgcos\alpha} + \boldsymbol{N})\vec{\jmath}_0$$

<u>Moment résultant au point G</u>

$$\vec{\boldsymbol{M}}_{G,ext} = \vec{\boldsymbol{M}}_G(\vec{\boldsymbol{R}}) + \vec{\boldsymbol{M}}_G(\vec{\boldsymbol{P}})$$

$$\vec{M}_G(\vec{P}) = \overrightarrow{GG} \wedge m\vec{g} = \vec{0}$$

$$\vec{M}_G(\vec{R}) = \overrightarrow{GI} \wedge \vec{R} = -r\vec{j}_0 \wedge (N\,\vec{j}_0 + T\,\vec{i}_0) = -r\vec{j}_0 \wedge T\vec{i}_0 = rT\vec{k}_0$$

$$\vec{M}_{G,ext} = rT\vec{k}_0$$

Le torseur des actions mécaniques extérieure est :

$$[\mathcal{F}_{ext}(S)]_G = {}_G\begin{Bmatrix} (mgsin\alpha + T)\vec{i}_0 + (-mgcos\alpha + N)\vec{j}_0 \\ rT\vec{k}_0 \end{Bmatrix}$$

<u>Torseur Dynamique de la sphère (S) par rapport à $(\mathcal{R}_0)$:</u>

$$[D(S/\mathcal{R}_0)]_G = {}_G\begin{Bmatrix} m\vec{\gamma}(G/\mathcal{R}_0) \\ \vec{\delta}_G(S/\mathcal{R}_0) = \left.\dfrac{d\vec{\sigma}_G(S/\mathcal{R}_0)}{dt}\right|_{\mathcal{R}_0} \end{Bmatrix}$$

Accélération du centre de masse G :

$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{GI} = x_G\vec{i}_0 + r\vec{j}_0$$

$$\vec{v}(G/R_0) = \dot{x}_G\vec{i}_0$$

$$\vec{\gamma}(G/R_0) = \ddot{x}_G\vec{i}_0$$

Moment cinétique de la sphère (S) par rapport au centre de masse G dans le référentiel $(\mathcal{R}_0)$ est :

$$\vec{\sigma}_G(S/\mathcal{R}_0) = \mathrm{II}_G(S).\vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_0) = \frac{2}{5}mr^2\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \frac{2}{5}mr^2\dot{\varphi}\,\vec{k}_0$$

Par conséquent :

$$\vec{\delta}_G(S/\mathcal{R}) = \left.\frac{d\vec{\sigma}_G(S/\mathcal{R}_0)}{dt}\right|_{\mathcal{R}_0} = \frac{2}{5}mr^2\ddot{\varphi}\,\vec{k}_0$$

Le torseur dynamique est :

$$[D(S/\mathcal{R}_0)]_G = {}_G\begin{Bmatrix} m\ddot{x}_G\vec{i}_0 \\ \dfrac{2}{5}mr^2\ddot{\varphi}\,\vec{k}_0 \end{Bmatrix}$$

- Egalité des résultantes : $m\vec{\gamma}(G/\mathcal{R}_0) = \vec{P} + \vec{R}$

$$m\ddot{x}_G = mgsin\alpha + T$$

$$0 = -mgcos\alpha + N$$

- Egalité des moments au point G (Théorème du moment cinétique):

$$\left.\frac{d\vec{\sigma}_G(S/\mathcal{R}_0)}{dt}\right|_{\mathcal{R}_0} = \vec{M}_{G,ext}$$

Qui donne :

$$\frac{2}{5}mr^2\ddot{\varphi} = rT$$

Donc :

$$\boldsymbol{T = \frac{2}{5} m r \ddot{\varphi}}$$

Le problème présente 4 inconnues : $\boldsymbol{x_G}$, φ, N et T

Nous avons trois équations. D'où la nécessité d'introduire une quatrième équation ! On discutera deux cas :

1^er^ Cas : Roulement sans glissement : $\vec{v}_g(I; S/\text{plan}) = \vec{v}(I \in S/\text{plan}) = \vec{\mathbf{0}}$

Cette égalité cinématique permet de résoudre le problème !

D'après la F.F.C.S : $\vec{v}(I \in S/\text{plan}) = \vec{v}(G/\mathcal{R}_0) + \vec{\Omega}(S/\mathcal{R}_0) \wedge \overrightarrow{\boldsymbol{GI}}$

$\vec{v}_g = \vec{v}(I \in S/\text{plan}) = \dot{x}_G \vec{i}_0 + \dot{\varphi} \vec{k}_0 \wedge -r\vec{j}_0 = (\dot{x}_G + r\dot{\varphi})\vec{j}_0$

$$\dot{x}_G + r\dot{\varphi} = 0$$

Qui traduit une liaison non holonome.

Finalement, on a un système de 4 équations à 4 inconnues. En dérivant la quatrième équation, on a :

$$\ddot{\varphi} = -\frac{\ddot{x}_G}{r}$$

En remplaçant dans l'expression de T, on obtient :

$$T = \frac{2}{5} m r \ddot{\varphi} = -\frac{2}{5} m \ddot{x}_G$$

$$-\frac{5}{2} T = m\ddot{x}_G = mg\sin\alpha + T$$

Donc : $\boldsymbol{T = -\frac{2}{7} mg\sin\alpha} < 0$:

Qui est orientée dans le sens des x décroissants. La force $\vec{\boldsymbol{T}}$ est une force qui s'oppose au mouvement.

La composante normale a pour expression : $\boldsymbol{N = mg\cos\alpha}$

Ce qui donne : $\ddot{x}_G = \frac{5}{7} g\sin\alpha$ et $\ddot{\varphi} = -\frac{5}{7}\frac{g\sin\alpha}{r}$

L'accélération $\ddot{\boldsymbol{x}}_G$ de la sphère est constante et positive : le mouvement de la sphère se fait dans le sens des x croissants.

Le roulement sans glissement a lieu si l'inégalité dynamique est vérifiée: $\|\vec{\boldsymbol{T}}\| \leq \boldsymbol{f}\, \|\vec{\boldsymbol{N}}\|$. soit :

$$tg\alpha \leq \frac{7}{2} f$$

Si l'angle $\boldsymbol{\alpha}$ est trop grand, il y'aura glissement.

2^ème^ cas : Roulement avec glissement : $\vec{v}_g = (\dot{x}_G + r\dot{\varphi})\vec{j}_0 \neq \vec{\mathbf{0}}$

Loi de Coulomb (inégalité cinématique) doit être vérifiée : $\vec{v}_g \cdot \vec{\boldsymbol{T}} < 0$

$\boldsymbol{v_g} = (\dot{x}_G + r\dot{\varphi}) > 0$ donc : $\boldsymbol{T} < 0$

Il y aura glissement donc :

$$\|\vec{T}\| = f\,\|\vec{N}\|$$

Cette égalité dynamique permet de résoudre le problème !

$$\|\vec{T}\| = |T| = -T = f\,N = fmgcos\alpha$$

Alors :

$$T = -fmgcos\alpha$$

Et donc : $\ddot{\varphi} = \frac{5}{2}\frac{T}{mr} = -\frac{5}{2}\frac{fgcos\alpha}{r}$

Le PFD donne: $m\ddot{x}_G = mgsin\alpha + T = mgsin\alpha - fmgcos\alpha$

D'où : $\ddot{x}_G = g(sin\alpha - fcos\alpha)$

Conditions initiales : $\dot{x}_G(t=0) = 0$ et $\dot{\varphi}(t=0) = 0$ (car immobilité initiale)

<u>**Intégration**</u>

$$\dot{x}_G = gt(sin\alpha - fcos\alpha)$$

$$\dot{\varphi} = -\left(\frac{5}{2}\frac{fgcos\alpha}{r}\right)t$$

Il y a roulement et glissement dans ce cas.

La condition de roulement avec glissement impose : $\vec{v}_g \cdot \vec{T} < 0$

Ou encore : $(\dot{x}_G + r\dot{\varphi}) = gtcos\alpha\left(tg\alpha - \frac{7}{2}f\right) > 0$

Soit :

$$tg\alpha > \frac{7}{2}f$$

Si l'angle α devient trop petit, le glissement cesse et le RSG a lieu

Problème 2

1- la relation entre le taux de rotation de la poulie $\vec{\Omega}$ et l'accélération $\vec{a}_G$ des deux corps solides

Le vecteur vitesse du point de contact C entre le câble et la poulie s'écrit

$$\vec{V}_C = \vec{V}_O + \overrightarrow{CO} \wedge \Omega \vec{z}_0 = -R\vec{v} \wedge \Omega \vec{z}_0 = -R\Omega\,\vec{u}$$

Donc, le vecteur accélération de ce point est la dérivée de $\vec{V}_C$:

$$\vec{a}_C = \frac{d\vec{V}_C}{dt} = -R\frac{d\Omega}{dt}\vec{u}$$

Or, comme le câble est inextensible, et, il n'y a pas de glissement entre le câble et la poulie, les deux masses seront en mouvement de translation. Par conséquent, l'accélération des masses **M** et **M'** est égale à l'accélération du point C de la poulie, où :

$$\vec{a}_G = \vec{a}_C = -R\frac{d\Omega}{dt}\vec{u}$$

2 - Le principe fondamental de la dynamique et l'accélération du système;

a- La masse de la poulie est négligeable ;

- Le principe fondamental appliqué à la masse M'

Le torseur dynamique au centre **G'** du corps solide de masse **M'** s'écrit :

$$[D]_{G'} = \begin{pmatrix} \vec{D} \\ \vec{\delta}_{G'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M' a_{G'} \vec{y}_0 \\ 0 \end{pmatrix}_G$$

Et, le torseur des forces extérieures au centre **G'**, s'obtient :

$$[F_e]_{G'} = \begin{pmatrix} \vec{F}_{ex} \\ \vec{M}_{G'}(F) \end{pmatrix}_{G'} = \begin{pmatrix} (T' - M'g)\vec{y}_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'égalité de la résultante des deux torseurs ($[D]_{G'} = [F_e]_{G'}$), permet d'écrire :

$$T' - M'g = M' a_G \Leftrightarrow T' = M' a_G + M'g$$

- Le principe fondamental appliqué à la masse M

Le torseur dynamique au centre **G** du corps solide de masse **M** s'écrit :

$$[D]_G = \begin{pmatrix} \vec{D} \\ \vec{\delta}_G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M a_G \vec{u} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Et le torseur des forces extérieures au centre **G**, s'obtient :

$$[F_e]_G = \begin{pmatrix} \vec{F}_e \\ \vec{M}_G(F) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (Mg\sin\alpha - T)\vec{u} + (R - Mg\cos\alpha)\vec{v} \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'égalité de la résultante des deux torseurs ($[D]_G = [F_e]_G$), permet d'écrire :

$$Mg\sin\alpha - T = Ma_G \Leftrightarrow T = -Ma_G + Mg\sin\alpha$$

L'accélération du système a_G *:*

Puisque le frottement est négligeable dans la poulie, la tension dans le câble reste constante, on écrit :

T = T'.

On remplace les tensions **T** et **T'** par leurs expressions respectives dans la relation ci dessus, on obtient l'accélération du système **:**

$$a_G = \frac{Mg\sin\alpha - M'g}{M + M'}$$

b- La masse de la poulie est égale à m ;

- Le principe fondamental appliqué à la poulie de masse **m**

On écrit le torseur dynamique au centre O de la poulie :

$$[D]_O = \begin{pmatrix} \vec{D} \\ \vec{\delta}_O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{d\vec{\sigma}_0}{dt} = I_{Oz}\frac{d\Omega}{dt}\vec{z}_0 = \frac{mR^2}{2}\frac{d\Omega}{dt}\vec{z}_0 \end{pmatrix}$$

Et le torseur des forces extérieures au centre O de la poulie, s'écrit :

$$[F_e]_O = \begin{pmatrix} \vec{F}_e \\ \vec{M}_O(F) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{R}_P - m\vec{g} + \vec{T} + \vec{T'} \\ (-RT + RT')\vec{z}_0 \end{pmatrix}$$

L'égalité des moments des deux torseurs de la poulie, donne :

$$\frac{mR^2}{2}\frac{d\Omega}{dt} = -RT + RT'$$

Or:

$$\vec{a}_G = \vec{a}_C = -R\frac{d\Omega}{dt}\vec{u}$$

Ou encore :

$$-\frac{m}{2}a_G = T' - T$$

Cette équation nous permet d'obtenir l'accélération du système $\mathbf{a_G}$:

$$a_G = \frac{Mg\sin\alpha - M'g}{M + M' + \frac{m}{2}}$$

Le même résultat obtenu pour $\mathbf{a_G}$ si $\mathbf{m = 0}$.