UCA - Marrakech -FP –Safi -Année Universitaire 19/20
Mécanique de solide

Planche 4 : Cinétique

Exercice 1

1. Vitesse de rotation instantanée du disque par rapport au repère R_0 :

$$\vec{\Omega}_2^0 = \vec{\Omega}_2^1 + \vec{\Omega}_1^0 = \dot{\psi}\,\vec{z}_2 + \dot{\theta}\,\vec{x}_2 = {}_{R_1}\begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} + \dot{\theta} \end{cases} \qquad \text{où} \qquad \dot{\psi} + \dot{\theta} = Cte$$

2. Vitesse et accélération du point C :

2.1. Vitesse :

Nous avons : $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC} = {}_{R_1}\begin{cases} L \\ 0 \\ -L/2 \end{cases}$; $\vec{V}^0(O) = \vec{0}$

$$\vec{V}^0(C) = \vec{V}^0(O) + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{OC} \quad \Rightarrow \quad \vec{V}^0(C) = {}_{R_1}\begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{cases} \wedge {}_{R_1}\begin{cases} L \\ 0 \\ L/2 \end{cases} = {}_{R_1}\begin{cases} 0 \\ L\dot{\psi} \\ 0 \end{cases}$$

2.2. Accélération:

$$\vec{\gamma}^0(C) = \frac{d^0\vec{V}^0(C)}{dt} = \frac{d^1\vec{V}^0(C)}{dt} + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{V}^0(C) \quad \text{avec} \quad \frac{d^1\vec{V}^0(C)}{dt} = \vec{0}$$

$$\vec{\gamma}^0(C) = {}_{R_1}\begin{cases} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{cases} \wedge {}_{R_1}\begin{cases} 0 \\ L\dot{\psi} \\ 0 \end{cases} = {}_{R_1}\begin{cases} -L\dot{\psi}^2 \\ 0 \\ 0 \end{cases}$$

3. Le torseur cinétique du disque au point O :

Les deux éléments de réduction du torseur cinétique sont :

- la résultante cinétique : $\vec{P}^0 = m\vec{V}^0(C) = {}_{R_1}\begin{cases} 0 \\ ML\dot{\psi} \\ 0 \end{cases}$

- le moment cinétique : $\vec{\sigma}^0(S/R_0) = I_C.\vec{\Omega}_2^0 + \overrightarrow{OC} \wedge M\vec{V}^0(C)$

$$\vec{\sigma}^0(S/R_0) = \begin{bmatrix} MR^2/4 & 0 & 0 \\ 0 & MR^2/4 & 0 \\ 0 & 0 & MR^2/2 \end{bmatrix}_{R_2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi}+\dot{\theta} \end{bmatrix} + \left\{ \begin{array}{c} L \\ 0 \\ L/2 \end{array} \right._{R_1} \wedge \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ ML\dot{\psi} \\ 0 \end{array} \right._{R_1}$$

$$\vec{\sigma}^0(S/R_0) = \left\{ \begin{array}{l} -\dfrac{ML^2}{2}\dot{\psi} \\ 0 \\ \dfrac{MR^2}{2}(\dot{\psi}+\dot{\theta}) + ML^2\dot{\psi} \end{array} \right._{R_1}$$

4. Le torseur dynamique du disque au points *O* :

Les deux éléments de réduction du torseur dynamique sont :

- la résultante cinétique : $\vec{D} = m\vec{\gamma}^0(C) = \left\{ \begin{array}{c} -ML\dot{\psi}^2 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right._{R_1}$;

- le moment dynamique : $\vec{\delta}^0(S/R_0) = \dfrac{d^0\vec{\sigma}^0(S/R_0)}{dt} = \dfrac{d^1\vec{\sigma}^0(S/R_0)}{dt} + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{\sigma}^0(S/R_0)$

$$\frac{d^1\vec{\sigma}^0(S/R_0)}{dt} = \vec{0}$$

$$\vec{\delta}^0(S/R_0) = \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{\sigma}^0(S/R_0) = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{array} \right._{R_1} \wedge \left\{ \begin{array}{l} -\dfrac{ML^2}{2}\dot{\psi} \\ 0 \\ \dfrac{MR^2}{2}(\dot{\psi}+\dot{\theta}) + ML^2\dot{\psi} \end{array} \right._{R_1} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ -\dfrac{ML^2}{2}\dot{\psi}^2 \\ 0 \end{array} \right._{R_1}$$

5. Energie cinétique du système.

$$E_C = \frac{1}{2}\vec{\Omega}_2^0 . I_G . \vec{\Omega}_2^0 + \frac{1}{2}M\left(\vec{V}^0(C)\right)^2$$

$$E_C = \frac{1}{2}\left(\dot{\psi}+\dot{\theta},\ 0,\ 0\right)\begin{bmatrix} MR^2/4 & 0 & 0 \\ 0 & MR^2/4 & 0 \\ 0 & 0 & MR^2/2 \end{bmatrix}_{R_2}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi}+\dot{\theta} \end{pmatrix} + \frac{1}{2}ML^2\dot{\psi}^2$$

$$E_C = \frac{1}{2}\frac{MR^2}{2}\left(\dot{\psi}+\dot{\theta}\right)^2 + \frac{1}{2}ML^2\dot{\psi}^2$$

Exercice 2 :

1

Le disque est en mouvement hélicoïdal (rotation + translation)
θ est l'angle de rotation du disque autour de l'axe Cz_1, donc, le taux de rotation est (Figure 3.16) :

$$\vec{\Omega}_{C/R_1} = \frac{d\theta}{dt}\vec{z}_1 = \dot{\theta}\vec{z}_1$$

Le déplacement du disque de **O** jusqu'au point de contact **I**, est égal à **x**, donc, la vitesse de translation du point **C** est :

$$\vec{V}_C = \frac{d\overrightarrow{O_1C}}{dt} = \frac{d\left(\overrightarrow{O_1I}+\overrightarrow{IC}\right)}{dt} = \frac{d\left(x\vec{x}_1 + R\vec{y}_1\right)}{dt} = \dot{x}\vec{x}_1$$

Par conséquent, le torseur cinématique du centre C du disque est :

$$[V]_C = \begin{pmatrix} \vec{\Omega}_{C/R_1} \\ \vec{V}_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\theta}\vec{z}_1 \\ \dot{x}\vec{x}_1 \end{pmatrix}$$

2- Les vecteurs vitesse et accélération du point M sur la périphérie du disque :

Appliquons la règle de distribution des vitesses dans un corps solide dans le point M :

$$\vec{V}_{M/R_1} = \vec{V}_C + \overrightarrow{MC} \wedge \vec{\Omega}_{C/R_1}$$

$$\vec{V}_{M/R_1} = \dot{x}\vec{x}_1 - r\,\vec{x} \wedge \dot{\theta}\vec{z}_1 = \dot{x}\vec{x}_1 + r\,\dot{\theta}\,\vec{y}$$

On exprime $\vec{V}_{M/R_1}$ dans le repère fixe :
Sachant que :

$$\vec{x} = \cos\theta\,\vec{x}_1 + \sin\theta\,\vec{y}_1$$
$$\vec{y} = -\sin\theta\,\vec{x}_1 + \cos\theta\,\vec{y}_1$$

Donc,

$$\vec{V}_{M/R_1} = \dot{x}\vec{x}_1 + r\,\dot{\theta}\left(-\sin\theta\,\vec{x}_1 + \cos\theta\,\vec{y}_1\right)$$

Le vecteur accélération du point M :

$$\vec{a}_{M/R_1} = \frac{d^{R_1}\vec{V}_{M/R_1}}{dt} = \frac{d^{R_1}\left(\vec{V}_{C/R_1} + \overrightarrow{MC} \wedge \vec{\Omega}_{C/R_1}\right)}{dt} = \frac{d^{R_1}\vec{V}_{C/R_1}}{dt} + \frac{d^{R_1}\left(\overrightarrow{MC} \wedge \vec{\Omega}_{C/R_1}\right)}{dt}$$

$$\vec{a}_{M/R_1} = = \frac{d^{R_1}\vec{V}_{C/R_1}}{dt} + \overrightarrow{MC} \wedge \frac{d^{R_1}\vec{\Omega}_{C/R_1}}{dt} + \vec{\Omega}_{C/R_1} \wedge \frac{d^{R_1}\overrightarrow{MC}}{dt}$$

Or, la dérivée d'un vecteur mobile est :

$$\frac{d^{R_1}\overrightarrow{MC}}{dt} = \vec{\Omega}_{C/R_1} \wedge \overrightarrow{MC}$$

D'où, la formule de Rivals concernant la loi de distribution des accélérations dans un corps solide :

$$\vec{a}_{M/R_1} = \vec{a}_{C/R_1} + \overrightarrow{MC} \wedge \frac{d\vec{\Omega}_{C/R_1}}{dt} + \left(\vec{\Omega}_{C/R_1} \wedge \overrightarrow{MC}\right) \wedge \vec{\Omega}_{T/R_1}$$

On remplaçant $\vec{a}_{C/R_1}$, $\overrightarrow{MC}$ et $\vec{\Omega}_{C/R_1}$ par ces expressions dans $\vec{a}_{M/R_1}$, on obtient :

$$\vec{a}_{M/R_1} = \ddot{x}\vec{x}_1 - r\vec{x} \wedge \frac{d\dot{\theta}\vec{z}_1}{dt} + \left(\dot{\theta}\vec{z}_1 \wedge -r\vec{x}\right) \wedge \dot{\theta}\vec{z}_1$$

Donc, Le vecteur accélération du point M, s'écrit :

$$\vec{a}_{M/R_1} = \ddot{x}\vec{x}_1 + r\ddot{\theta}\vec{y} - r\dot{\theta}^2\vec{x}$$

3- La condition de roulement sans glissement au point de contact **I** avec l'axe (O, $\vec{x}_1$) :

Le vecteur vitesse du point de contact **I** :
Lorsque le point M coïncide avec le point de contact I, on aura :

$$\theta = \frac{3\pi}{2} \text{ et } \vec{y} = \vec{x}_1$$

C'est-à-dire que :

$$\vec{V}_{I/R_1} = \vec{V}_{M/R_1}(\theta = \frac{3\pi}{2})$$

D'où :

$$\vec{V}_{I/R_1} = \dot{x}\vec{x}_1 + r\dot{\theta}\vec{x}_1 = \left(\dot{x} + r\dot{\theta}\right)\vec{x}_1$$

La condition de roulement sans glissement au point de contact I, est la vitesse de glissement $\vec{V}_g$ nulle, c'est-à-dire :

$$\vec{V}_g = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{V}_I = \vec{0} \Leftrightarrow \left(\dot{x} + r\dot{\theta}\right)\vec{x}_1 = \vec{0} \Leftrightarrow \left(\dot{x} + r\dot{\theta}\right) = 0$$

4.

4

Le torseur cinématique au centre C

$$[V]_C = \begin{pmatrix} \vec{\Omega} \\ \\ \vec{V}_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\theta}\vec{z}_1 \\ \\ \dot{x}\vec{x}_1 \end{pmatrix}$$

Où :

$\vec{\Omega}_{C/R_1} = \dot{\theta}\vec{z}_1$ est le taux de rotation du disque autour de son axe

$\vec{V}_C = \dot{x}\vec{x}_1$ est le vecteur vitesse de translation du centre C.

5

Le torseur dynamique au centre C, du disque s'écrit :

$$[D]_C = \begin{pmatrix} \vec{D} \\ \\ \vec{\delta}_C \end{pmatrix}$$

Avec :

$\vec{D}$: La quantité d'accélération du centre C du disque;

$$\vec{D} = m\frac{d\vec{V}_G}{dt} = m\frac{d\vec{V}_C}{dt} = m\ddot{x}\vec{x}_1$$

$\vec{\delta}_C$: Le moment dynamique au centre C du disque. Puisque le disque est en rotation autour de l'axe Cz, il s'écrit :

$$\vec{\delta}_C = \frac{d\vec{\sigma}_C}{dt} = I_{Cz}\frac{d\vec{\Omega}}{dt} = \frac{1}{2}mr^2\ddot{\theta}\vec{z}_1$$

D'où, le torseur dynamique au centre C qui s'exprime :

$$[D]_C = \begin{pmatrix} m\ddot{x}\vec{x}_1 \\ \\ \frac{1}{2}mr^2\ddot{\theta}\vec{z}_1 \end{pmatrix}$$