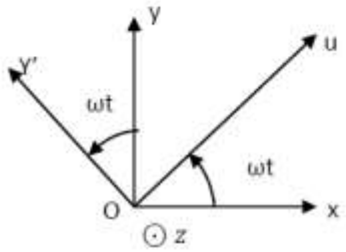
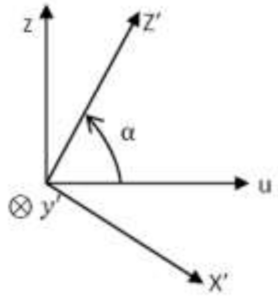
UCA - Marrakech -FP –Safi Année Universitaire 19/20
Mécanique de solide

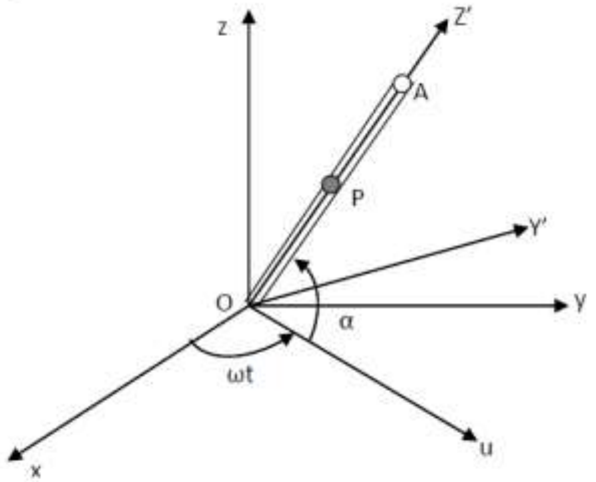
Planche 2 : cinématique

Exercice 1

1- Vecteur vitesse angulaire de rotation







$$R(O,x,y,z) \xrightarrow{\omega\ \vec{z}} R_1(O,u,y',z) \xrightarrow{\alpha\ autour\ de\ y'} R'(O,x',y',z')$$

α est constant, donc $\vec{\Omega}(S/_R) = \omega\vec{z} = \omega\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\vec{z'} - \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\vec{x'}\right] = \omega\left[\sin\alpha\,\vec{z'} - \cos\alpha\,\vec{x'}\right]$

$$\boldsymbol{\vec{\Omega}(S/_R) = \omega\left[\sin\alpha\,\vec{z'} - \cos\alpha\,\vec{x'}\right]}$$

2- Vitesse de P par rapport au repère R

Vitesse relative de P

$$\vec{V_r}\left(P/_{R'}\right) = \left.\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt}\right|_{R'} = \dot{r}\,\vec{z'} \qquad \text{où } \overrightarrow{OP} = r\vec{z'}$$

Vitesse d'entraînement de P

$$\vec{V_e}(P/_R) = \vec{\Omega}\left(R'/_R\right) \wedge \overrightarrow{OP} = \boldsymbol{\omega}\left[\sin\alpha\,\vec{z'} - \cos\alpha\,\vec{x'}\right] \wedge r\vec{z'} = r\,\omega\cos\alpha\,\vec{y'}$$

$$\vec{V_e}(P/_R) = r\,\omega\cos\alpha\,\vec{y'}$$

Vitesse absolue de P

$$\boldsymbol{\vec{V_a}(P/_R) = \vec{V_r}(P/_R) + \vec{V_e}(P/_R) = r\,\omega\cos\alpha\,\vec{y'} + \dot{r}\,\vec{z'}}$$

3- Accélération de P par rapport au repère R

Accélération relative

$$\overrightarrow{\gamma_r}\left(P/_{R'}\right) = \left.\frac{d\overrightarrow{V_r}\left(P/_{R'}\right)}{dt}\right|_{R'} = \ddot{r}\,\overrightarrow{z'}$$

Accélération d'entraînement

$$\overrightarrow{\gamma_e}(P/_R) = \vec{\Omega}(S/_R) \wedge [\vec{\Omega}(S/_R) \wedge \overrightarrow{OP}] = \omega[\sin\alpha\,\overrightarrow{z'} - \cos\alpha\,\overrightarrow{x'}] \wedge r\,\omega\,\cos\alpha\,\overrightarrow{y'}$$

$$\overrightarrow{\gamma_e}(P/_R) = -r\omega^2\cos\alpha\,\left[\sin\alpha\,\overrightarrow{x'} + \cos\alpha\,\overrightarrow{z'}\right]$$

Accélération de Coriolis

$$\overrightarrow{\gamma_C}(P/_R) = 2\,\vec{\Omega}(S/_R) \wedge \overrightarrow{V_r}\left(P/_{R'}\right) = 2\omega\,\dot{r}\,\cos\alpha\,\overrightarrow{y'}$$

Accélération absolue

$$\overrightarrow{\gamma_a}(P/_R) = \overrightarrow{\gamma_r}(P/_R) + \overrightarrow{\gamma_e}(P/_R) + \overrightarrow{\gamma_C}(P/_R)$$

$$\overrightarrow{\gamma_a}(P/_R) = \begin{pmatrix} -r\omega^2\cos\alpha\sin\alpha \\ 2\omega\,\dot{r}\,\cos\alpha \\ \ddot{r} - r\omega^2\cos^2\alpha \end{pmatrix}_{R'}$$

4- Vitesse et accélération par calcul direct

Vitesse de P par rapport à R

$$\overrightarrow{OP} = r\overrightarrow{z'} \Rightarrow \vec{V}(P/_R) = \left.\frac{d\overrightarrow{OP}}{dt}\right|_R = \dot{r}\,\overrightarrow{z'} + r\left.\frac{d\overrightarrow{z'}}{dt}\right|_R = \dot{r}\,\overrightarrow{z'} + r\left[\underbrace{\left.\frac{d\overrightarrow{z'}}{dt}\right|_{R'}}_{=\vec{0}} + \vec{\Omega}\left(R'/_R\right) \wedge \overrightarrow{z'}\right]$$

$$\vec{V}(P/_R) = \dot{r}\,\overrightarrow{z'} + r\omega[\sin\alpha\,\overrightarrow{z'} - \cos\alpha\,\overrightarrow{x'}] \wedge \overrightarrow{z'} = \dot{r}\,\overrightarrow{z'} + r\omega\cos\alpha\,\overrightarrow{y'}$$

Accélération de P par rapport à R

$$\overrightarrow{\gamma_a}(P/_R) = \left.\frac{d\vec{V}(P/_R)}{dt}\right|_R = \ddot{r}\,\overrightarrow{z'} + \dot{r}\left.\frac{d\overrightarrow{z'}}{dt}\right|_R + \dot{r}\omega\cos\alpha\,\overrightarrow{y'} + r\omega\cos\alpha\left.\frac{d\overrightarrow{y'}}{dt}\right|_R$$

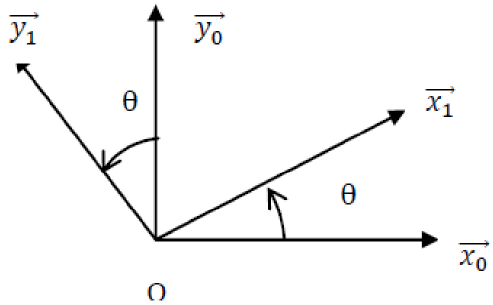
$$= \ddot{r}\,\overrightarrow{z'} + 2\,\dot{r}\omega\cos\alpha\,\overrightarrow{y'} + r\omega\cos\alpha\,\vec{\Omega}\left(R'/_R\right) \wedge \overrightarrow{y'}$$

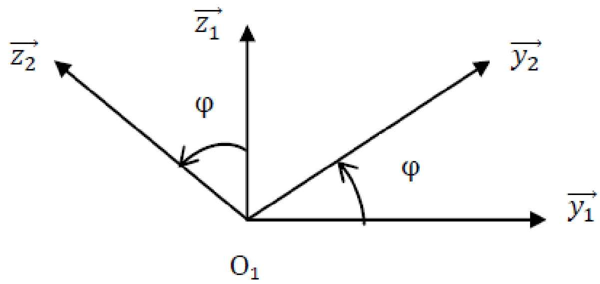
$$\overrightarrow{\gamma_a}(P/_R) = \begin{pmatrix} -r\omega^2\cos\alpha\sin\alpha \\ 2\omega\,\dot{r}\,\cos\alpha \\ \ddot{r} - r\omega^2\cos^2\alpha \end{pmatrix}_{R'}$$

Exercice 2

Solution

1- Le vecteur de rotation instantané du disque par rapport au repère fixe est :





$$\vec{\Omega}\left({}^{D}/_{R_0}\right) = \dot{\theta}\,\vec{z_1} + \dot{\varphi}\,\vec{x_1}$$

2- Vitesse et accélération de O_1 par calcul direct

$$\overrightarrow{OO_1} = L(\cos\theta\,\vec{x_0} + \sin\theta\,\vec{y_0}) \Rightarrow$$

$$\vec{V}\left({}^{O_1}/_{R_0}\right) = \left.\frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt}\right|_{R_0} = L\dot{\theta}\,(-\sin\theta\,\vec{x_0} + \cos\theta\,\vec{y_0}) = L\dot{\theta}\,\vec{y_1}$$

$$\vec{\Gamma}\left({}^{O_1}/_{R_0}\right) = L\begin{pmatrix} -\ddot{\theta}\sin\theta - \dot{\theta}^2\cos\theta \\ \ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}_{R_0} = L\,\ddot{\theta}\,\vec{y_1} - L\,\dot{\theta}^2\,\vec{x_1}$$

Vitesse et accélération de M par composition des mouvements

- Vitesse relative

$$\vec{V}\left({}^{M}/_{R_1}\right) = \left.\frac{d\overrightarrow{O_1M}}{dt}\right|_{R_1} = R\left.\frac{d\vec{z_2}}{dt}\right|_{R_1} = R\,\vec{\Omega}\left({}^{R_2}/_{R_1}\right)\wedge\vec{z_2} = R\,\dot{\varphi}\,\vec{x_1}\wedge(\cos\varphi\,\vec{z_1} - \sin\varphi\,\vec{y_1})$$

$$\vec{V}\left({}^{M}/_{R_1}\right) = -R\,\dot{\varphi}(\cos\varphi\,\vec{y_1} + \sin\varphi\,\vec{z_1})$$

- Vitesse d'entraînement

$$\vec{V}\left({}^{M\epsilon R_1}/_{R_0}\right) = \left.\frac{d\overrightarrow{OO_1}}{dt}\right|_{R_0} + \vec{\Omega}\left({}^{R_1}/_{R_0}\right)\wedge\overrightarrow{O_1M} = L\dot{\theta}\,\vec{y_1} + \dot{\theta}\,\vec{z_1}\wedge R\,\vec{z_2}$$

$$= L\dot{\theta}\,\overrightarrow{y_1} + R\dot{\theta}\,\overrightarrow{z_1} \wedge (\cos\varphi\,\overrightarrow{z_1} - \sin\varphi\,\overrightarrow{y_1})$$

$$\vec{V}\left({M\epsilon R_1}/{R_0}\right) = \dot{\theta}\,(R\sin\varphi\,\overrightarrow{x_1} + L\,\overrightarrow{y_1})$$

- Vitesse absolue

$$\vec{V}\left({M}/{R_0}\right) = \vec{V}\left({M}/{R_1}\right) + \vec{V}\left({M\epsilon R_1}/{R_0}\right) = \begin{pmatrix} R\,\dot{\theta}\sin\varphi \\ L\,\dot{\theta} - R\,\dot{\varphi}\cos\varphi \\ -R\,\dot{\varphi}\sin\varphi \end{pmatrix}_{R_1}$$

- Accélération relative

$$\vec{\Gamma}\left({M}/{R_1}\right) = \left.\frac{d\,\vec{V}\left({M}/{R_1}\right)}{dt}\right|_{R_1} = -R\begin{pmatrix} 0 \\ \ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi \\ \ddot{\varphi}\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi \end{pmatrix}_{R_1}$$

- Accélération d'entraînement

$$\vec{\Gamma}\left({M\epsilon R_1}/{R_0}\right) = \left.\frac{d^2\overrightarrow{OO_1}}{dt^2}\right|_{R_0} + \frac{d\vec{\Omega}\left({R_1}/{R_0}\right)}{dt} \wedge \overrightarrow{O_1M} + \vec{\Omega}\left({R_1}/{R_0}\right) \wedge \left[\vec{\Omega}\left({R_1}/{R_0}\right) \wedge \overrightarrow{O_1M}\right]$$

$$\vec{\Gamma}\left({M\epsilon R_1}/{R_0}\right) = \begin{pmatrix} -L\,\dot{\theta}^2 + R\ddot{\theta}\sin\varphi \\ L\,\ddot{\theta} - R\dot{\theta}^2\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1}$$

- Accélération de Coriolis

$$\vec{\Gamma_c}\left({M}/{R_0}\right) = 2\vec{\Omega}\left({R_1}/{R_0}\right) \wedge \vec{V}\left({M}/{R_1}\right) = 2\dot{\theta}\,\overrightarrow{z_1} \wedge -R\dot{\varphi}(\cos\varphi\,\overrightarrow{y_1} + \sin\varphi\,\overrightarrow{z_1})$$

$$\vec{\Gamma_c}\left({M}/{R_0}\right) = 2R\,\dot{\theta}\,\dot{\varphi}\cos\varphi\,\overrightarrow{x_1}$$

- Accélération absolue

$$\vec{\Gamma}\left({M}/{R_0}\right) = \vec{\Gamma}\left({M}/{R_1}\right) + \vec{\Gamma}\left({M\epsilon R_1}/{R_0}\right) + \vec{\Gamma_c}\left({M}/{R_0}\right)$$

$$\vec{\Gamma}\left({M}/{R_0}\right) = \begin{pmatrix} -L\,\dot{\theta}^2 + R\ddot{\theta}\sin\varphi + 2R\,\dot{\theta}\,\dot{\varphi}\cos\varphi\,\overrightarrow{x_1} \\ L\,\ddot{\theta} - R\dot{\theta}^2\sin\varphi - R\ddot{\varphi}\cos\varphi + R\dot{\varphi}^2\sin\varphi \\ -R\,\ddot{\varphi}\sin\varphi - R\dot{\varphi}^2\cos\varphi \end{pmatrix}_{R_1}$$