Analyse II

SMPC S2

Année Universitaire : 2019-2020

Table des matières

CHAPITRE 1

Intégrales simples et primitives

1.1 Intégrales et Sommes de Riemann

Définition 1.1. *On appelle subdivision d'ordre n de l'intervalle $[a, b]$ toute partie finie, $\Delta = \{x_0, x_1, ...x_n\}$ de $[a, b]$ telle que $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b$.*
◦ *On note $I_k = [x_k, x_{k+1}]$ un intervalle de la subdivision et $l_k = x_{k+1} - x_k$ sa longueur.*
◦ *Le nombre $\Pi_\Delta = \max\limits_{0\leqslant k\leqslant n-1} l_k$ est dit pas de la subdivision.*

Exemple 1.2. *La subdivision équidistante d'ordre n est la subdivision obtenue en découpant l'intervalle $[a, b]$ en n intervalle de même longeur : $x_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$ avec $k = 0, ..., n$, $l_k = \dfrac{b-a}{n}$ et $\Pi_\Delta = \dfrac{b-a}{n}$*

Définition 1.3. *Soit $\Delta = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ une subdivision de $[a, b]$. Pour chaque $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$ soit $t_k \in [x_k, x_{k+1}]$. On pose $RS_\Delta(f) = \sum\limits_{k=0}^{n-1}(x_{k+1} - x_k)f(t_k)$ et on l'appelle la somme de Riemann de f associé à Δ et aux points $\{t_0, t_1, ..., t_{n-1}\}$*

Théorème 1.4. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, lorsque le pas de la subdivision tend vers 0, la somme de Riemann $RS_\Delta(f)$ tend vers une limite finie, cette limite est noté par $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ et est appelée l'intégrale de f sur $[a, b]$*

Remarque 1.5. *Géométriquement, les sommes de Riemann peuvent être vues comme une valeur approchée de l'intégrale de f par la méthode des rectangles. Le théorème 1.4 explicite qu'elles approchent effectivement l'intégrale de f.*

Précisément, l'écart entre $\int_a^b f(t)dt$ et $RS_\Delta(f)$ peut être majoré par une quantité ne dépendant que du pas de la subdivision, quantité qui tend vers 0 lorsque le pas tend vers 0.
Le plus souvent, ce théorème est appliquée lorsque la subdivision est régulière, et lorsque les t_k sont égaux à x_i ou x_{i-1}. On a donc le résultat suivant :

Proposition 1.6. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors,*

1. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a + k\frac{b-a}{n}) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$
2. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(a + k\frac{b-a}{n}) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

Preuve. *Il suffit de prendre la subdivision équidistante,* $x_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$.

1) $\dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(a+k\frac{b-a}{n}) = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{b-a}{n}f(x_k) = \sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)f(x_k) = RS_\Delta(f) \to_{n\to+\infty} \int_a^b f(x)dx$

Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(a+k\frac{b-a}{n}) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$

2) Même preuve.

Corollaire 1.7. *Si f est continue sur $[0,1]$ alors*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n}) = \int_0^1 f(x)dx$$

et

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n}) = \int_0^1 f(x)dx$$

Exemple 1.8. *Soit* $u_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + ... + \dfrac{1}{n+n}$, *calculer* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$.

$u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n(1+\frac{k}{n})} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}$

Soit $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ *on a :* $u_n = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})$

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = [\log(1+x)]_0^1 = \log(2)$

1.2 Propriétés de l'intégrales

Proposition 1.9. *Soit $c \in]a,b[$ et f une fonction continue sur $[a,b]$, alors on a la relation de Chasles :*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Proposition 1.10. *Soient f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$, alors on a :*

1. $\displaystyle\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$
2. *Pour tout λ réel,* $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda\int_a^b f(x)dx.$
3. *Si $f \geqslant 0$ sur $[a,b]$ alors* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geqslant 0$
4. *Si $f \leqslant g$ sur $[a,b]$ alors* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx$

Preuve. *1) et 2)- On a*

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(f+g)(x_k) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) + \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g(x_k)$$

et $\displaystyle\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(\lambda f)(x_k) = \lambda\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$ *et par passage à la limite on a le résultat.*

3) Si $f \geqslant 0$ alors $\displaystyle\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \geqslant 0$ *et par passage à la limite on a le résultat.*

4) Si $g - f \geqslant 0$ sur $[a,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b (g-f)(x)dx \geqslant 0$, *et par conséquent* $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx$

Convention :

1. Si f est définie au point a alors $\int_a^a f(x)dx = 0$
2. Si $a > b$ et si f est continue sur $[b, a]$ alors $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

Corollaire 1.11. *Si f est continue sur $[a, b]$, on a :* $|\int_a^b f(x)dx| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx$.

Preuve. *On a* $-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$ *donc*

$$-\int_a^b |f(x)|dx \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b |f(x)|dx$$

D'où $|\int_a^b f(x)dx| \leqslant \int_a^b |f(x)|dx$.

Proposition 1.12. *(1^{er} Formule de la moyenne)*
Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$. On suppose que g garde un signe constant sur $[a, b]$, alors il existe $c \in [a, b]$ tel que

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$$

Preuve. *Supposons que g est positive sur $[a, b]$ et soient $m = \inf\limits_{[a,b]} f$ et $M = \sup\limits_{[a,b]} f$, on a $\forall x \in [a, b]$ $m \leqslant f(x) \leqslant M$, donc $\forall x \in [a, b]$*

$$mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x)$$

et par suite

$$m\int_a^b g(x) \leqslant \int_a^b f(x)g(x)dx \leqslant M\int_a^b g(x)dx$$

Si $\int_a^b g(x)dx = 0$ alors $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$ et l'égalité est vérifiée pour tout $c \in [a, b]$.

Si $\int_a^b g(x)dx \neq 0$ alors $\int_a^b g(x)dx > 0$ et $m \leqslant \dfrac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leqslant M$

Comme f est continue sur $[a, b]$, f atteint ses bornes, il existe donc $c_1 \in [a, b]$ et $d_1 \in [a, b]$ tels que $m = f(c_1)$ et $M = f(d_1)$ et d'après le T.V.I, il existe $c \in [a, b]$ tel que $\dfrac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} = f(c)$, ce qui implique que $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$

Corollaire 1.13. *Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$*

Preuve. *On applique la proposition 1.12 à la fonction $g \equiv 1$ sur $[a, b]$.*

1.3 Primitives

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$.

Définition 1.14. *Une fonction* $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *est une primitive de* f *sur* I *si :* F *est dérivable sur* I *et* $\forall x \in I : F'(x) = f(x)$.

Proposition 1.15. *Soit* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$. *Si* F *est une primitive de* f *sur* I *alors :*

1. $F + K$, *avec* $K \in \mathbb{R}$, *est une primitive de* f *sur* I.
2. *Toute primitive* G *de* f *sur* I *est de la forme* $G = F + K$, *avec* $K \in \mathbb{R}$.

Une primitive de f *est appelée intégrale indéfinie de* f *et est notée* $\displaystyle\int f(x) = F + K$.

Preuve. *1)* $(F(x) + K)' = F'(x) = f(x)$ *donc* $F + K$ *est une primitive de* f.
2) Soit G *une primitive de* f *sur* I. *Soit* $a \in I$ *et* $x \in I$, *par le T.A.F appliqué à la fonction* $G - F$ *sur l'intervalle fermé d'éxtrémités* a *et* x, *il existe* c *compris strictement entre* a *et* x *tel que* $(G - F)(x) - (G - F)(a) = (x - a)(G - F)'(c)$
Donc $G(x) - F(x) - G(a) + F(a) = (x - a)(G'(c) - F'(c)) = 0$
D'où $G(x) = F(x) + G(a) - F(a) = F(x) + K$.

Théorème 1.16. *Si* f *est continue sur* I *et* $a \in I$, *alors la fonction* F *définie sur* I *par* $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ *est une primitive de* f *sur* I

Preuve. *Soient* $x \in I$ *et* $h \in \mathbb{R}$ *telle que* $x + h \in I$, *on a :*

$$\begin{aligned} F(x+h) - F(x) &= \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \\ &= \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \\ &= \int_x^{x+h} f(t)dt \end{aligned}$$

f *étant continue sur l'intervalle d'éxtrémités* x *et* $x + h$, *d'après la formule de la moyenne il existe* c_h *compris entre* x *et* $x + h$, *tel que*

$$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} f(t)dt = (x + h - x)f(c_h) = hf(c_h)$$

Puisque f *est continue, nous avons*

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(c_h) = f(x)$$

D'où $F'(x) = f(x)$

Proposition 1.17. *Soit* f *une fonction continue sur* I.

1. *Pour toute primitive* G *de* f *sur* I, *on a :*
$$\int_a^x f(x)dx = G(x) - G(a)$$
2. $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(x)dx$ *est la seule primitive de* f *qui s'annule au point* a.

Preuve. *1) D'après la proposition 1.15, on a* $G(x) = F(x) + K$ *donc* $G(x) = \displaystyle\int_a^x f(x)dx + K$ *d'où* $G(a) = \displaystyle\int_a^a f(x)dx + K = K$ *donc* $G(x) = \displaystyle\int_a^x f(x)dx + G(a)$ *ce qui implique que* $\displaystyle\int_a^x f(x)dx =$

$G(x) - G(a)$.

2) On a $F(a) = a$. Réciproquement, si G est une primitive tel que $G(a) = 0$ alors $\int_a^x f(x)dx = G(x) - G(a) = G(x)$ d'où $G(x) = \int_a^x f(x)dx$.

Corollaire 1.18. *Soient f une fonction continue sur $[a, b]$ et u et v deux fonctions dérivables à valeurs dans $[a, b]$. Alors si $F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt$ on a $F'(x) = v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x))$.*

Preuve. *Posons $G(x) = \int_a^x f(t)dt$*

$$\begin{aligned} F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt &= \int_{u(x)}^{a} f(t)dt + \int_a^{v(x)} f(t)dt \\ &= \int_a^{v(x)} f(t)dt - \int_a^{u(x)} f(t)dt \\ &= G(v(x)) - G(u(x)). \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} F'(x) &= v'(x)G'(v(x)) - u'(x)G'(u(x)) \\ &= v'(x)f(v(x)) - u'(x)f(u(x)) \end{aligned}$$

Exemple 1.19. *Calculer la dérivé de $h(x) = \int_{-x^2}^{2x^5} e^{\sin(t)}dt$*
On a : $h'(x) = 2xe^{\sin(-x^2)} + 10x^4e^{\sin(2x^5)}$

Primitives des fonctions usuelles

$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + K$ pour $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$\int \frac{1}{x}dx = \log|x| + K$

$\int \cos(x)dx = \sin(x) + K$

$\int \sin(x)dx = -\cos(x) + K$

$\int \frac{dx}{\cos^2(x)} = \tan(x) + K$

$\int \frac{-dx}{\sin^2(x)} = cotant(x) + K$

$\int e^x dx = e^x + K$

$\int chx\ dx = shx + K$

$\int shxdx = chx + K$

$\int \ln(x)dx = x\ln(x) - x + K$

$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + K$

$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + K$

$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = argshx + K = \log(x + \sqrt{1+x^2}) + K$

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = argchx + K = \log(x + \sqrt{x^2-1}) + K$

Théorème 1.20. *Soit I un intervalle de I. Si f et g ont des primitives sur I alors $f + \lambda g$ admet aussi une primitive sur I et on a :* $\int f + \lambda g = \int f + \lambda \int g$

Théorème 1.21. *(Intégration par parties)*
Soient f et g deux fonctions de classe C^1 sur $[a, b]$, on a alors :

1. $\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$
2. $\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x)g'(x)dx$

Preuve. *Il suffit de remarquer que* $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

Exemple 1.22. *1) Calculer* $\int x^2 e^x dx$
On pose $f(x) = e^x$ *et* $g(x) = x^2$ *donc* $f'(x) = e^x$ *et* $g'(x) = 2x$
$\int x^2 e^x dx = f(x)g'(x) - \int f(x)g'(x)dx = x^2 e^x - \int 2xe^x dx$
On pose $f(x) = e^x$ *et* $g(x) = 2x$ *donc* $f'(x) = e^x$ *et* $g'(x) = 2$
$\int x^2 e^x dx = f(x)g'(x) - \int f(x)g'(x)dx = 2xe^x - \int 2e^x dx$
Donc $\int x^2 e^x dx = 2xe^x - 2e^x + K$, *d'où*

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + K = (x^2 - 2x + 2)e^x + K$$

2) Calculer $\int \sin(x)e^x dx$
On pose $f(x) = \sin(x)$, $g(x) = e^x$ $f'(x) = \cos(x)$, $g'(x) = e^x$

$$\begin{aligned}
\int \sin(x)e^x dx &= e^x \sin(x) - \int \cos(x)e^x dx \\
&= e^x \sin(x) - (e^x \cos(x) + \int e^x \sin(x)dx) \\
&= e^x \sin(x) - e^x \cos(x) - \int \sin(x)e^x dx
\end{aligned}$$

Donc $2\int \sin(x)e^x dx = e^x \sin(x) - e^x \cos(x)$
D'où $\int \sin(x)e^x dx = \frac{1}{2}(\sin(x) - \cos(x))e^x + K$

Remarque 1.23. *Pour calculer* $\int P(x)\cos(\beta x)$, $\int P(x)\sin(\beta x)$ *ou* $\int P(x)e^{\alpha x}$ *avec P un polynôme à coefficient réels, on fait des intégration par parties pour diminuer le degré du polynôme P jusqu'à sa disparition(comme l'exemple 1.22 1)*

Théorème 1.24. *(Changement de variables) Soient $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et $\varphi : [\alpha,\beta] \longrightarrow [a,b]$ de classe C^1 alors*
$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx$$

Preuve. *Soit F une primitive de f sur $[a,b]$, soit $G(t) = F(\varphi(t))$ pour $t \in [\alpha,\beta]$.*
On a : $G'(t) = \varphi'(t)F'(\varphi(t)) = \varphi'(t)f(\varphi(t))$ donc
$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt &= \int_\alpha^\beta G'(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)\\ &= F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha))\\ &= \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx\end{aligned}$$

Remarque 1.25. *Dans la pratique, il suffit d'écrire $x = \varphi(t)$ et $dx = \varphi'(t)dt$.*
Si $t = \alpha$ alors $x = \varphi(\alpha)$
Si $t = \beta$ alors $x = \varphi(\beta)$
$\int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx.$

Exemple 1.26. *1) Calculer $\int_0^1 \frac{e^t}{1+e^{2t}}dt$*
On pose $x = e^t$, on a $dx = e^t dt$.
$t = 0$ alors $x = 1$
$t = 1$ alors $x = e$
$\int_0^1 \frac{e^t}{1+e^{2t}}dt = \int_1^e \frac{1}{1+x^2}dx = [\arctan(x)]_1^e = \arctan(e) - \arctan(1)$
2) Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(t)dt$
$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\sin(t)dt$

$$\begin{aligned}I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(t)dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t)\sin(t)dt\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos^2(t))\sin(t)dt\end{aligned}$$

On pose $x = \cos(t)$, $dx = -\sin(t)dt$
$I = -\int_1^0 (1-x^2)dx = \int_0^1 (1-x^2)dx = [x - \frac{x^3}{3}]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

Exemple 1.27. *1) Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\sin(t)dt$.*
On pose $x = \cos(t)$, $dx = -\sin(t)$.
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\sin(t)dt = -\int_1^0 x^2dx = \int_0^1 x^2dx = [\frac{x^3}{3}]_0^1 = \frac{1}{3}.$
2) Calculer $\int_0 \frac{\pi}{2} \cos^5(t)dt$.
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5(t).\cos(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-sin^2(t))^2\cos dt.$
On pose $x = \sin(t)$, $dx = \cos(t)dt$.

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5(t)dt &= \int_1^0 (1-x^2)^2dx = \int_0^1 (1+x^4-2x^2)dx\\ &= [x + \frac{x^5}{5} - 2\frac{x^3}{3}]_0^1 = 1 + \frac{1}{5} - \frac{2}{3} = \frac{8}{15}\end{aligned}$$

1.4 Primitives des fonctions rationnelles, Primitives de fonctions rationnelles de certaines fonctions usuelles.

1.4.1 Primitives de fonctions rationnelles

Une fonction rationnelles est de la forme $F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, où P et Q sont deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$.
On sait que toute fonction rationnelle se décompose comme suit :

$$F(x) = Q_2(x) + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}, \text{ où } deg(P_1) < deg(Q_1),\ Q_1 \text{ unitaire et } Q_2(x) \in \mathbb{R}[X]$$

On sait que $Q_1(x)$ peut être mis sous la forme :

$$Q_1(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - r_i)^{k_i} \prod_{j=1}^{m}(x^2 + p_j x + q_j)^{h_j} \text{ avec } p_j^2 - 4q_j < 0$$

et par suit la décomposition en éléments simples, on obtient :

$$F(x) = Q_2(x) + \sum_{i=1}^{n}(\sum_{\alpha=1}^{k_i} \frac{c_{\alpha,i}}{(x - r_i)^{\alpha}}) + \sum_{j=1}^{m}(\sum_{\beta=1}^{h_i} \frac{a_{\beta,j}x + b_{\beta,j}}{(x^2 + p_j x + q_j)^{\beta}})$$

où les $k_i, h_j \in \mathbb{N}$ et $c_{\alpha,i}, a_{\beta,j}, b_{\beta,j}, p_j, q_j \in \mathbb{R}$, avec $p_j^2 - 4q_j < 0$
Le calcul des primitives de fonctions rationnelles se ramène donc à celui des primitives de fonctions de la forme :

1. $\displaystyle\int x^n dx,\ n \in \mathbb{N}.$
2. $\displaystyle\int \frac{1}{(x - r)^n} dx,\ r \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}^*$
3. $\displaystyle\int \frac{ax + b}{(x^2 + px + q)^n} dx \text{ avec } p_j^2 - 4q_j < 0$

Nous avons donc,

1. $\displaystyle\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$
2. $\displaystyle\int \frac{1}{(x - r)^n} = \begin{cases} \log|x - r| + c; \text{ si } n = 1 \\ \dfrac{1}{-n+1}(x - r)^{-n+1} = \dfrac{1}{(1 - n)(x - r)^{n-1}} + c \text{ si } n > 1. \end{cases}$
3. Calcule de $\displaystyle\int \frac{ax + b}{(x^2 + px + q)^n} dx$ avec $p^2 - 4q < 0, n \in \mathbb{N}^*$

on a $\displaystyle\int \frac{ax + b}{(x^2 + px + q)^n} dx = \frac{a}{2} \int \frac{2x + p}{(x^2 + px + q)^n} dx + (b - \frac{pa}{2}) \int \frac{1}{(x^2 + px + q)^n} dx$
On a

$$\int \frac{2x + p}{(x^2 + px + q)^n} dx = \begin{cases} \log(x^2 + px + q) + c; \text{ si } n = 1 \\ \dfrac{1}{(1 - n)(x^2 + px + q)^{n-1}} + c \text{ si } n > 1. \end{cases}$$

Reste l'intégrale de la forme $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2 + px + q)^n} dx$
On a :

$$(x^2 + px + q)^n = ((x + \frac{p}{2})^2 + \frac{4q - p^2}{4})^n = (\frac{4q - p^2}{4})^n((\frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}})^2 + 1)^n$$

On pose $u = \dfrac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}},\ du = \dfrac{2}{\sqrt{4q - p^2}} dx.$

$$\int \frac{1}{(x^2+px+q)^n}dx = (\frac{4}{4q-p^2})^n \int \frac{1}{(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}})^2+1)^n}dx = (\frac{4}{4q-p^2})^n \frac{\sqrt{4q-p^2}}{2} \int \frac{1}{(u^2+1)^n}du$$

On pose $I_n = \int \frac{1}{(u^2+1)^n}du$, par une intégration par parties, on montre que

$$2nI_{n+1} = \frac{u}{(1+u^2)^n} + (2n-1)I_n$$

et

$$I_1 = \int \frac{1}{1+u^2}du = \arctan u + c.$$

Exemple 1.28. *Calculer* $\int \frac{3x}{x^3-1}dx$.

$F(x) = \frac{3x}{x^3-1} = \frac{3x}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$

$A = ((x-1)F(x))_1 = 1 \Longrightarrow A = 1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} xF(x) = 0 = A + B \Longrightarrow B = -A = -1 \Longrightarrow B = -1$

$F(0) = 0 = -A + C \Longrightarrow C = A = 1 \Longrightarrow C = 1$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{3x}{x^3-1} &= \frac{1}{x-1} + \frac{-x+1}{x^2+x+1} \\ &= \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\frac{2x+1}{x^2+x+1} + \frac{3}{2}\frac{1}{x^2+x+1} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \int \frac{3x}{x^3-1}dx &= \int \frac{dx}{x-1}dx - \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}dx \\ &= \log|x-1| - \frac{1}{2}\log(x^2+x+1) + \frac{3}{2}I \end{aligned}$$

avec $I = \int \frac{1}{x^2+x+1}dx = \int \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dx = \frac{4}{3}\int \frac{1}{(\frac{2x+1}{\sqrt{3}})^2+1}dx$

On pose $u = \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$, $du = \frac{2}{\sqrt{3}}dx$

donc $I = \frac{4}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{1}{u^2+1}du = \frac{2\sqrt{3}}{3}\arctan u + c$

D'où, $\int \frac{3x}{x^3-1}dx = \log|x-1| - \frac{1}{2}\log(x^2+x+1) + \sqrt{3}\arctan(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}) + c$

Exemple 1.29. *Calculer* $I = \int \frac{x}{(x^2-x+1)^2}dx$

$I = \frac{1}{2}\int \frac{2x-1}{(x^2-x+1)^2}dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x^2-x+1)^2}dx$

$I = -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2-x+1} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x^2-x+1)^2}dx \qquad (*)$

On pose $J = \int \frac{1}{(x^2-x+1)^2}dx$

On a : $J = \int \frac{1}{((x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4})^2}dx = \frac{16}{9}\int \frac{1}{((\frac{2x-1}{\sqrt{3}})^2+1)^2}dx$

On pose $x = \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$ $du = \frac{2}{\sqrt{3}}dx$

$J = \frac{16}{9}\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{1}{(u^2+1)^2}du$
Dans $\int \frac{1}{u^2+1}du$ *on pose* $f = u$, $f' = 1$, $g = \frac{1}{u^2+1}$, $g' = \frac{-2u}{(u^2+1)^2}$
donc

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{u^2+1}du &= \frac{u}{u^2+1} + \int \frac{2u^2}{(u^2+1)^2}du = \frac{u}{u^2+1} + 2\int \frac{u^2+1-1}{(u^2+1)^2}du \\ &= \frac{u}{u^2+1} + 2\int \frac{1}{u^2+1}du - 2\int \frac{du}{(u^2+1)^2}\end{aligned}$$

donc $\int \frac{du}{(u^2+1)^2} = \frac{1}{2}(\frac{u}{u^2+1} + \arctan(u)) + c$
D'où

$$\begin{aligned}J &= \frac{16}{9}\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{2}(\frac{u}{u^2+1} + \arctan u) + c \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{9}(\frac{2x-1}{\sqrt{3}((\frac{2x-1}{\sqrt{3}})^2+1)} + \arctan(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}) + c \\ &= \frac{1}{3}\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{4\sqrt{3}}{9}\arctan(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}) + c\end{aligned}$$

Par $(*)$ *on obtient* $I = -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2-x+1} + \frac{1}{6}.\frac{2x-1}{x^2-x+1} + \frac{2\sqrt{3}}{9} + \frac{2\sqrt{3}}{9}\arctan(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}) + c$

1.4.2 Primitives de fonctions rationnelles de certaines fonctions usuelles

Fonctions rationnelles en $\sin x$ **et** $\cos x$

$\int \frac{P(\sin x, \cos x)}{Q(\sin x, \cos x)}dx$, où P et Q sont deux polynômes à deux variables à coefficients réels.
Le cas d'un polynôme en $\sin x$ **et** $\cos x$ $\int P(\sin x, \cos x)dx$:
La calcul de cette primitive se ramène au calcul de $\int(\cos x)^n(\sin x)^m dx$ où $n, m \in \mathbb{N}$
– Si n est impair : $n = 2p+1$, on pose $t = \sin x$

$$\begin{aligned}\int(\cos x)^n(\sin x)^m dx &= \int(\cos^2 x)^p \cos x(\sin x)^m dx \\ &= \int(1-\sin^2 x)^p(\sin x)^m \cos x dx = \int(1-t^2)^p t^m dt\end{aligned}$$

– Si m est impair : $m = 2q+1$, on pose $t = \cos x$

$$\begin{aligned}\int(\cos x)^n(\sin x)^m dx &= \int(\cos x)^n(\sin^2 x)^q \sin x dx \\ &= \int(\cos x)^n(1-\cos^2 x)^q \sin x dx = -\int t^n(1-t^2)^q dt\end{aligned}$$

– Si n et m sont pairs : $n = 2p$ et $m = 2q$, on linéarise $(\cos x)^{2p}(\sin x)^{2q}$
Le cas d'une fonction $\int \frac{P(\sin x, \cos x)}{Q(\sin x, \cos x)}dx$
On utilise le changement de variable $t = \tan(\frac{x}{2})$, qui donne :

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \text{ et } dx = \frac{2}{1+t^2}dt$$

On se ramène ainsi au calcul des primitives d'une fonction rationnelle de la variable t.
Dans des cas particulière il'y a d'autres changement de variables.

Proposition 1.30. *(Régle de Bioche)*
Soit à calculer $\int \frac{P(\sin x, \cos x)}{Q(\sin x, \cos x)}dx$*, où* P *et* Q *sont deux polynômes à deux variables à coefficients réels.*

1. *Si* $F(-x) = -F(x)$*, on pose* $t = \cos(x)$.
2. *Si* $F(\pi - x) = -F(x)$*, on pose* $t = \sin(x)$.
3. *Si* $F(x + \pi) = F(x)$*, on pose* $t = \tan(x)$.

Exemple 1.31. *Calculer* $I = \int \frac{1}{\cos x(\sin x - \cos x)}dx$
Soit $F(x) = \frac{1}{\cos x(\sin x - \cos x)}$*, on a* $F(x+\pi) = F(x)$*, on pose donc* $t = \tan(x)$*,* $dt = (1+t^2)dx$

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1}{\cos^2 x(\tan x - 1)}dx = \int \frac{1+\tan^2 x}{\tan x - 1}dx = \int \frac{1+t^2}{t-1}\frac{dt}{1+t^2} \\ &= \int \frac{dt}{t-1} = \log|t-1| + cte = \log|\tan(x) - 1| + cte \end{aligned}$$

Exemple 1.32. *Calculer* $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos x}dx$*, on a* $F(-x) \neq -F(x)$*,* $F(\pi - x) \neq -F(x)$ *et* $F(x+\pi) \neq F(x)$.
On pose $t = \tan(\frac{x}{2})$*,* $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$*,* $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$.
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos x}dx = \int_0^1 \frac{1}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}}.\frac{2}{1+t^2}dt = \int_0^1 dt = 1$

Fonctions rationnelles en $e^{\alpha x}, \alpha \in \mathbb{R}$

Pour calculer $\int F(e^{\alpha x})dx$, où F est une fonction rationnelle et $\alpha \in \mathbb{R}$, on utilise en général le changement de variable $t = e^{\alpha x}$, on a alors $dt = \alpha t dx$ donc

$$\int F(e^{\alpha x})dx = \int \frac{F(t)}{\alpha t}dt$$

Exemple 1.33. *Calculer* $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$
On pose $t = e^x$*,* $dt = e^x dx = t dx \Longrightarrow dx = \frac{dt}{t}$.

$$\begin{aligned} \int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx &= \int \frac{t}{1+t^2}\frac{dt}{t} = \int \frac{1}{1+t^2}dt = \arctan(t) + c \\ &= \arctan(e^x) + c \end{aligned}$$

Exemple 1.34. *Calculer* $\int \frac{1}{1+e^{2x}}dx$
On pose $t = e^x$*,* $dt = e^x dx = t dx \Longrightarrow dx = \frac{dt}{t}$.

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{1+e^{2x}}dx &= \int \frac{1}{1+t^2}\frac{dt}{t} \\
&= \int (\frac{1}{t} - \frac{t}{1+t^2})dt = \int (\frac{1}{t} - \frac{1}{2}\frac{2t}{1+t^2})dt \\
&= \log|t| - \frac{1}{2}\log|1+t^2| + cte = \log|\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}| + cte \\
&= \log|\frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}| + cte
\end{aligned}$$

1.5 Exercices

Exercice 1. Calculer en utilisant les sommes de Riemann les limites des suites suivantes :

a) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2nk}}$, b) $u_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\sin(\frac{k\pi}{n})$ c) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{2n^2+2nk+k^2}$

Exercice 2. Calculer les suivantes :

1) $\int_0^x \cos^2(t)\sin^2(t)dt;$ 2) $\int \sin^7(t)dt;$ 3) $\int e^t\cos(e^t)dt;$ 4) $\int e^{-t}\cos(2t)dt$

5) $\int \frac{1}{t(1+\ln(t))}dt;$ 6) $\int \frac{\cos^3(x)}{\sin^5(x)}dx;$ 7) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan(x)}{1+\tan(x)}dx;$ 8) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3(x)}{(1+\cos x)^2}dx;$

9) $\int_0^x \arcsin(x)dx;$ 10) $\int \frac{2x^2-x+2}{2x-3}dx;$ 11) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx;$ 12) $\int_0^1 \frac{\arctan(x)}{(1+x)^2}$

Exercice 3. Pour $x > 0$, on pose : $F(x) = \int_x^{2x} \frac{\sin(t)}{t}dt.$

1) Calculer $F'(x)$ pour tout $x > 0$.

2) Trouver $\lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{x}$.

Exercice 4. Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

1)En utilisant le changement de variable $t = \pi - x$, montrer que l'on a : $\int_0^\pi xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)dx.$

2) En déduire la valeur de $I = \int_0^\pi \frac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)}dx$

Exercice 5. Soit $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$ où $n \in \mathbb{N}$.

1) Calculer I_0, I_1 et I_2.

2) Vérifier que I_n est décroisante.

3) En déduire que I_n est convergente.

4) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}\ 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.

5) Donner la limite de I_n.

CHAPITRE 2

Intégrales Généralisées

2.1 Généralités

Dans le chapitre précédent, on a défini et étudié la notion d'intégrale de Riemann d'une fonction définie sur un intervalle fermé et borné. Dans ce chapitre, on cherche à étendre la notion d'intégrale aux fonctions non nécessairement bornée et définies sur des intervalles de la forme $[a, b[$; $[a, +\infty[$, $]a, b]$, $]-\infty, b]$, $]a, b[$, $]-\infty, +\infty[$.

Définition 2.1. *Soit f une fonction continue sur $[a, b[$ où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$. Pour $x \in [a, b[$, on pose $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. On dit que l'intégrale de f sur $[a, b[$ est convergente ou existe si $\lim_{x\to b} F(x)$ existe et elle est finie.*
Cette limite est appelée intégrale généralisée ou impropre de f sur $[a, b[$, et on la note par $\int_a^b f(t)dt$.
$\longrightarrow$ Si $\lim_{x\to b} F(x)$ n'existe pas ou égale à ∞, on dit que l'intégrale de f sur $[a, b[$ n'existe pas ou divergente.

Définition 2.2. *Soit f une fonction continue sur $]a, b]$ où $b \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ ou $a = -\infty$. Pour $x \in]a, b]$, on pose $F(x) = \int_x^b f(t)dt$. On dit que l'intégrale de f sur $]a, b]$ est convergente ou existe si $\lim_{x\to a} F(x)$ existe et elle est finie.*
Cette limite est appelée intégrale généralisée ou impropre de f sur $]a, b]$, et on la note par $\int_a^b f(t)dt$.
$\longrightarrow$ Si $\lim_{x\to a} F(x)$ n'existe pas ou égale à ∞, on dit que l'intégrale de f sur $]a, b]$ n'existe pas ou divergente.

Exemple 2.3. *1) Etudier la convergence de $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$.*
Pour $x \geqslant 0$ on a :

$$\int_0^x e^{-t}dt = [-e^{-t}]_0^x = -e^{-x} + 1$$

$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x e^{-t}dt = \lim_{x\to+\infty} 1 - e^{-x} = 1$. *Donc* $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$ *est convergente et on a :* $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1$
2) Etudier la convergence de $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}}$ *et* $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$
Pour $x \geqslant 1$ on a : $\int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t}} = [2\sqrt{t}]_1^x = 2\sqrt{x} - 2 \to +\infty$, *qd* $x \to +\infty$. *Donc* $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}}$ *diverge*
Pour $\varepsilon > 0$: $\int_\varepsilon^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = [2\sqrt{t}]_\varepsilon^1 = 2 - 2\sqrt{\varepsilon} \to 2$, *qd* $\varepsilon \to 0$. *Donc* $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ *est converge et on a* $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2$.

Remarque 2.4. *1) Si f est continue sur $[a, b[$ et si $c \in [a, b[$ alors $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$ sont de même nature. En effet :*

$$\int_a^x f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^x f(t)dt$$

$\lim_{x \to b} \int_a^x f(t)dt$ *existe dans* $\mathbb{R}$ *si et seulement si* $\lim_{x \to b} \int_c^x f(t)dt$ *existe dans* $\mathbb{R}$

2) De même si f est continue sur $]a,b]$ et si $c \in]a,b]$ alors $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^c f(t)dt$ sont de même nature.

Définition 2.5. *Soit f une fonction continue sur $]a,b[$ $(-\infty \leqslant a \leqslant b \leqslant +\infty)$. On dit que l'intégrale de f sur $]a,b[$ est convergente s'il existe $c \in]a,b[$ tel que chacune des intégrales de f sur $]a,c]$ et sur $[c,b[$ sont convergentes, et on pose*

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

Le nombre $\int_a^b f(t)dt$ est indépendant de c, et s'appelle l'intégrale généralisée de f sur $]a,b[$.

Exemple 2.6. *1) Etudier la convergence de* $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt$

Pour $x > 0$: $\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = [\arctan t]_0^x = \arctan x \to \frac{\pi}{2}$, *qd* $x \to +\infty$.

Donc $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{2}$

Pour $x < 0$: $\int_x^0 \frac{1}{1+t^2}dt = [\arctan t]_x^0 = -\arctan x \to \frac{\pi}{2}$, *qd* $x \to -\infty$.

Donc $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{2}$

D'où $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+t^2}dt + \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$

2) Etudier la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(t)dt$

Pour $x > 0$: $\int_0^x \sin(t)dt = -[\cos(t)]_0^x = -\cos(x) + 1$ *n'a pas de limite qd* $x \to +\infty$, *donc* $\int_0^x \sin(t)dt$ *diverge et par suite* $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(t)dt$ *diverge.*

Définition 2.7. *1) Soit f une fonction continue sur $]a,b[$ et sur $]b,d[$. On dit que $\int_a^d f(t)dt$ est convergente si les deux intégrales $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_b^d f(t)dt$ sont convergentes, et dans ce cas on pose :*

$$\int_a^d f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^d f(t)dt$$

2) Soit $a_0 < a_1 < ... < a_n$, soit f une fonction continue sur $]a_i, a_{i+1}[$ pour chaque $i \in \{0,...,n-1\}$. On dit que $\int_{a_0}^{a_n} f(t)dt$ est convergente si pour chaque $i \in \{0,...,n-1\}$, $\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)dt$ est convergente et dans ce cas on pose

$$\int_{a_0}^{a_n} f(t)dt = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(t)dt$$

Exemple 2.8. $\int_0^{10} \frac{e^t}{t(t-1)(t-2)}dt$ *converge si et seulement si les* 3 *intégrales suivantes sont convergentes :*

$$\int_0^1 \frac{e^t}{t(t-1)(t-2)}dt, \quad \int_1^2 \frac{e^t}{t(t-1)(t-2)}dt, \quad et \quad \int_2^{10} \frac{e^t}{t(t-1)(t-2)}dt$$

Proposition 2.9. *(Exemple de référence)*

Soit $a > 0$ *et* $\alpha \in \mathbb{R}$

1. $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ *converge* $\Longleftrightarrow \alpha > 1$,
2. $\int_0^a \frac{1}{x^\alpha} dx$ *converge* $\Longleftrightarrow \alpha < 1$,

Preuve. *1) Si* $\alpha = 1$

$\lim_{t\to+\infty} \int_a^t \frac{1}{x} dx = \lim_{t\to+\infty} [\log|x|]_a^t = \lim_{t\to+\infty} \log|t| - \log a = +\infty.$

Donc $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ *diverge.*

Si $\alpha \neq 1$

$\lim_{t\to+\infty} \int_a^t \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{t\to+\infty} [\frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}]_a^t = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{(1-\alpha)t^{\alpha-1}} - \frac{1}{(1-\alpha)a^{\alpha-1}}$

$$= \begin{cases} -\frac{1}{(1-\alpha)a^{\alpha-1}} \ \textit{si } \alpha > 1 \ \textit{(cv)}\,; \\ \\ +\infty \ \textit{si } \alpha < 1 \ \textit{(div)}. \end{cases}$$

2) Si $\alpha = 1$

$\lim_{\varepsilon\to+\infty} \int_\varepsilon^a \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon\to 0} [\log|x|]_\varepsilon^a = \lim_{\varepsilon\to 0} \log a - \log|\varepsilon| = +\infty.$

Donc $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$ *diverge.*

Si $\alpha \neq 1$

$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_\varepsilon^a \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{\varepsilon\to 0} [\frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}]_\varepsilon^a = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{(1-\alpha)a^{\alpha-1}} - \frac{1}{(1-\alpha)\varepsilon^{\alpha-1}}$

$$= \begin{cases} \frac{1}{(1-\alpha)a^{\alpha-1}} \ \textit{si } \alpha < 1\,; \\ \\ +\infty \ \textit{si } \alpha > 1\ . \end{cases}$$

Remarque 2.10. *L'étude de l'intégrale généralisée d'une fonction f sur un intervalle $]c,d]$ se ramène par le changement de variable $t = -x$ à l'étude de l'intégrale généralisée de la fonction $x \longrightarrow f(-x)$ sur l'intervalle $[-d,-c[$*

$$\int_c^d f(t)dt = \int_{-d}^{-c} f(-t)dt$$

Dans la suite on va considérer seulement les intégrales généralisées sur des intérvalles de type $[a,b[$.

$\boxed{2.2}$ Critères de convergence pour les fonctions positives

Proposition 2.11. *Soit f une fonction continue positive sur $[a,b[$. Pour que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ soit convergente, il faut et il suffit, qu'il existe $M > 0$ tel que $\forall x \in [a,b[$: $\int_a^x f(t)dt \leqslant M$.*

Preuve. *Soit $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ pour $x \in [a,b[$.*

Si $x < y$ alors $F(y) - F(x) = \int_a^y f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^y f(t)dt \geqslant 0$ donc F est croissante.

$\int_a^b f(t)dt$ cv $\Longleftrightarrow \lim_{x\to b} F(x)$ existe dans $\mathbb{R}$ $\Longleftrightarrow F(x)$ est majoré $\Longleftrightarrow \exists M > 0$ tel que $\forall x \in [a,b[$: $\int_a^x f(t)dt \leqslant M$.

Proposition 2.12. *Soient f et g deux fonctions positives continue sur $[a,b[$ vérifiant $0 \leqslant f(t) \leqslant g(t)$ pour tout $t \in [a,b[$. Alors on a :*

1. *Si* $\int_a^b g(t)dt$ *converge alors* $\int_a^b f(t)dt$ *converge et dans ce cas on a :*
$$\int_a^b f(t)dt \leqslant \int_a^b g(t)dt$$
2. *Si* $\int_a^b f(t)dt$ *diverge alors* $\int_a^b g(t)dt$ *diverge.*

Preuve. *Pour* $x \in [a, b[$ *on pose* $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ *et* $G(x) = \int_a^x g(t)dt$ *on a* $F(x) \leqslant G(x)$.

1) Si $\int_a^b g(t)dt$ *converge alors* $G(x)$ *est majoré donc* $F(x)$ *est majoré d'où* $\int_a^b f(t)dt$ *converge.*
2) C'est la contraposée de 1).

Exemple 2.13. *Déterminer la nature de l'intégrale* $\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x+1}dx$

On a : $\forall x \in [0, +\infty[,\ 0 \leqslant \frac{1}{e^x+1} \leqslant \frac{1}{e^x}$
or $\int_0^t \frac{1}{e^x}dx = \int_0^t e^{-x}dx = [-e^{-x}]_0^t = -e^{-t} + 1 \to 1$ *qd* $t \to +\infty$ *Donc* $\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x}dx$ *converge, d'où* $\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x+1}dx$ *converge.*

Définition 2.14. *Deux fonctions* f *et* g *définies à gauche de* $b \in \mathbb{R}$*, sauf peut être en* b *(resp. au voisinage de* $+\infty$*) sont équivalentes à gauche de* b *(resp. au voisinage de* $+\infty$*) s'il existe une fonction* ε *définie à gauche de* b *sauf peut être en* b *(resp. au voisinage de* $+\infty$*) telle que* $f(x) = g(x)(1+\varepsilon(x))$ *avec* $\lim_{x\to b-} \varepsilon(x) = 0$ *(resp.* $\lim_{x\to+\infty} \varepsilon(x) = 0$*).*

Théorème 2.15. *Soient* $a \in \mathbb{R}$ *et* b *tel que* $a < b \leqslant +\infty$. f *et* g *deux fonctions positives, continue sur* $[a, b[$.

1. *Si* f *et* g *sont équivalentes à gauche de* b *(resp. au voisinage de* $b = +\infty$*) alors* $\int_a^b f(t)dt$ *et* $\int_a^b g(t)dt$ *sont de même nature.*
2. *Si* $\lim_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ *alors* $\int_a^b g(t)dt$ *converge* $\Longrightarrow \int_a^b f(t)dt$ *converge*
3. *Si* $\lim_{x\to b-} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ *alors* $\int_a^b g(t)dt$ *diverge* $\Longrightarrow \int_a^b f(t)dt$ *diverge*

Exemple 2.16. *1) Etudier la convergence des intégrales* $\int_0^1 \frac{e^x-1}{x^{3/2}}dx$ *et* $\int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^5+1}}dx$.

- $\frac{e^x-1}{x^{3/2}} \sim_0 \frac{x}{x^{3/2}} = \frac{1}{x^{1/2}}$ *or* $\int_0^1 \frac{1}{x^{1/2}}dx$ *converge donc* $\int_0^1 \frac{e^x-1}{x^{3/2}}dx$ *converge.*
- $\frac{x}{\sqrt{x^5+1}} = \frac{x}{x^{5/2}\sqrt{1+\frac{1}{x^5}}} = \frac{1}{x^{3/2}\sqrt{1+\frac{1}{x^5}}} \sim \frac{1}{x^{3/2}}$

Or $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}$ *converge donc* $\int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^5+1}}dx$ *converge.*

2) Etudier la convergence de $\int_0^1 \frac{dt}{\sin t}$
On a $\frac{1}{\sin t} \sim_0 \frac{1}{t}$ *et* $\int_0^1 \frac{1}{t}dt$ *diverge, donc* $\int_0^1 \frac{dt}{\sin t}dt$ *diverge.*

Corollaire 2.17. *Soit* f *une fonction positive et continue sur* $[a, +\infty[$ *avec* $a > 0$*, on a :*

1. *Si* $f(x) \sim_{+\infty} \dfrac{C}{x^\alpha}$ $(C \neq 0)$ *alors* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *et* $\int_a^{+\infty} \dfrac{1}{x^\alpha}dx$ *sont de même nature, donc*
$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1$$
2. *Si* $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha f(x) = 0$ *et* $\alpha > 1$ *alors* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *converge.*
3. *Si* $\lim\limits_{x\to+\infty} x^\alpha f(x) = +\infty$ *et* $\alpha \leqslant 1$ *alors* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *diverge.*

Exemple 2.18. *Etudier la nature des intégrales* $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$, $\int_1^{+\infty} \dfrac{\log t}{t}dt$, $\int_1^{+\infty} \dfrac{\log t}{t^2}dt$.

$\to \lim\limits_{t\to+\infty} t^2 e^{-t^2} = 0$ *et* $2 > 1$ *alors* $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$ *converge.*

$\to \lim\limits_{t\to+\infty} t\dfrac{\log t}{t} = \lim\limits_{t\to+\infty} \log t = +\infty$ *et* $1 \leqslant 1$ *alors* $\int_1^{+\infty} \dfrac{\log t}{t}dt$ *diverge.*

$\to \lim\limits_{t\to+\infty} t^{3/2}\dfrac{\log t}{t^2} = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\log t}{t^{1/2}} = 0$ *et* $\dfrac{3}{2} > 1$ *donc* $\int_1^{+\infty} \dfrac{\log t}{t^2}dt$ *converge.*

$\triangle$ *On remarque qu'on n'obtient rien si on multiple* $\dfrac{\log t}{t^2}$ *par* t *ou par* t^2 *en effet :*

$\lim\limits_{t\to+\infty} t^2\dfrac{\log t}{t^2} = \lim\limits_{t\to+\infty} \log t = +\infty$ *mais* $\alpha = 2 > 1$.

$\lim\limits_{t\to+\infty} t\dfrac{\log t}{t^2} = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{\log t}{t} = 0$ *mais* $\alpha = 1 \leqslant 1$.

Corollaire 2.19. *Soit* f *une fonction positive et continue sur* $[a, b[$, a *et* $b \in \mathbb{R}$, $a < b$, *on a :*

1. *Si* $f(x) \sim_b \dfrac{A}{(b-x)^\alpha}$ $(A \in \mathbb{R}^*)$ *alors* $\int_a^b f(x)dx$ *et* $\int_a^b \dfrac{1}{(b-x)^\alpha}dx$ *sont de même nature, donc*
$$\int_a^b f(x)dx \text{ converge si et seulement si } \alpha < 1$$
2. *Si* $\lim\limits_{x\to b-} (b-x)^\alpha f(x) = 0$ *et* $\alpha < 1$ *alors* $\int_a^b f(x)dx$ *converge.*
3. *Si* $\lim\limits_{x\to b-} (b-x)^\alpha f(x) = +\infty$ *et* $\alpha \geqslant 1$ *alors* $\int_a^b f(x)dx$ *diverge.*

Exemple 2.20. *Donner la nature de* $\int_1^2 \dfrac{1}{\sqrt{x^4-1}}dx$

Sur $]1, 2]$ *la fonction* $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^4-1}}$ *est positive et continue*
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x-1)(x+1)(x^2+1)}} = \frac{1}{(x-1)^{\frac{1}{2}}\sqrt{(x+1)(x^2+1)}}$$
$\lim\limits_{x\to1} (x-1)^{\frac{1}{2}} f(x) = \dfrac{1}{2} \Longrightarrow f(x) \sim_1 \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(x-1)^{\frac{1}{2}}}$

Or $\int_1^2 \dfrac{1}{(x-1)^{\frac{1}{2}}}dx$ *converge donc* $\int_1^2 \dfrac{1}{\sqrt{x^4-1}}dx$ *converge*

Remarque 2.21. *Si* $f \leqslant 0$ *et continue sur* $[a, b[$ *alors* $-f \geqslant 0$ *sur* $[a, b[$ *et on a :* $\int_a^b f(t)dt$ *et* $\int_a^b (-f)(t)dt$ *sont de même nature.*

Définition 2.22. *Soit f une fonction continue sur $[a,b[$ où $a < b \leqslant +\infty$. L'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ est dite absolument convergente si $\int_a^b |f(t)|dt$ converge.*

Théorème 2.23. *Une intégrale absolument convergente est convergente.*

$$\int_a^b |f(t)|dt \text{ converge} \Longrightarrow \int_a^b f(t)dt \text{ converge}$$

Preuve. *Pour tout $t \in [a,b[$ on a : $-|f(t)| \leqslant f(t) \leqslant |f(t)|$ donc $0 \leqslant f(t)+|f(t)| \leqslant 2|f(t)|$ $\int_a^b |f(t)|dt$ converge donc $\int_a^b 2|f(t)|dt$ converge et par suite $\int_a^b (f(t)+|f(t)|)dt$ converge.*

$\forall x \in [a,b[$:

$$\int_a^x f(t)dt = \int_a^b (f(t)+|f(t)|)dt - \int_a^x |f(t)|dt$$

D'où

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)dt &= \lim_{x\to b}\int_a^x f(t)dt = \lim_{x\to b}\int_a^x (f(t)+|f(t)|)dt - \lim_{x\to b}\int_a^x |f(t)|dt \\ &= \int_a^b (f(t)+|f(t)|)dt - \int_a^b |f(t)|dt\end{aligned}$$

Donc $\int_a^b f(t)dt$ converge.

Exemple 2.24. *Etudier l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{2\sin t - 3\cos t}{t^2}dt$*

$\forall t \in [1,+\infty[$ on a $\left|\frac{2\sin t - 3\cos t}{t^2}\right| \leqslant \frac{5}{t^2}$
or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}dt$ converge donc $\int_1^{+\infty} \frac{5}{t^2}dt$ converge d'où $\int_1^{+\infty} \left|\frac{2\sin t - 3\cos t}{t^2}\right| dt$ converge.

D'où $\int_1^{+\infty} \frac{2\sin t - 3\cos t}{t^2}dt$ converge.

Théorème 2.25. *(Intégration par parties)*
Soient f et g deux fonctions de classe C^1 sur $[a,b[$ ($a < b \leqslant +\infty$). Si $\lim_{x\to b} f(x)g(x)$ existe dans $\mathbb{R}$ alors les intégrales $\int_a^b f(t)g'(t)dt$ et $\int_a^b f'(t)g(t)dt$ sont de même nature, et en cas de convergence on a :

$$\int_a^b f(t)g'(t)dt = \lim_{x\to b} f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(t)g(t)dt$$

Exemple 2.26. *Etudier la nature de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt$*
Posons

$$g = \frac{1}{t}, \quad g' = -\frac{1}{t^2}$$

$$f = -\cos t, \quad f' = \sin t$$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$ *donc $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}dt$ sont de même nature, or $\left|\frac{\cos t}{t^2}\right| \leqslant \frac{1}{t^2}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}dt$ converge donc $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2}dt$ converge d'où $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt$ converge.*

2.3 Exercices

Exercice 6. Donner la nature et la valeur éventuelle des intégrales suivantes :

$$\int_0^{+\infty} e^x dx; \qquad \int_0^1 \log(t) dt;$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\log(t)} \qquad \int_1^{+\infty} \frac{\log(1+x)}{x^2} dx$$

Exercice 7. Soient a un nombre réel strictement positif et $I(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\log(x)}{x^2+a^2} dx$.

1) Montrer que l'intégrale $I(a)$ est convergente.

2) En utilisant le changement de variable : $x = \frac{a}{t}$, calculer $I(a)$ en fonction de $I(1)$.

3) En déduire que $I(a) = \dfrac{\pi}{2a}\log(a)$.

Exercice 8. Discuter, selon les valeurs des paramètres réels α et β la nature des intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t} dt \qquad \text{et} \qquad J = \int_0^{+\infty} x^\beta (1 - e^{-\frac{1}{\sqrt{x}}}) dx$$

CHAPITRE 3

Equations différentielles

Soit $F(x, z_0, z_1, ..., z_n)$ une fonction de $(n+2)$ variables réelles définie sur une partie A de $\mathbb{R}^{n+2}$. Une équation différentielles est une équation qui s'écrit sous la forme :

$$(E): \quad F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

où l'inconnue y est une fonction de la variable réelle x.
L'entier n est dit ordre de l'équation différentielle.
Résoudre l'équation différentielle (E), c'est déterminer sa solution générale c-à-d toutes les fonctions g définies et dérivables jusqu'a l'ordre n sur un intervalle J de $\mathbb{R}$ telles que :

$$x \in J \Longrightarrow (x, g(x), g'(x), ..., g^{(n)}(x)) \in A$$

et

$$F(x, g(x), g'(x), ..., g^{(n)}(x)) = 0$$

Exemple 3.1.

1. *La quantité de carbone notée $N(t)$ dans un échantillon animal ou végétal décroit après la mort de celui-ci. Elle vérifié l'équation différentielle*

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda.N$$

2. *Considérons la chute d'un corps de masse m soumis à frottement fluide, proportionel à la vitesse. Le vecteur position $x(t)$ est solution de l'équation différentielle*

$$mx'' + \gamma x' - mgx = 0.$$

3. *Considérons un circuit RCL en série. L'intensité i qui traverse le circuit obéit à l'équation différentielle :*

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = 0.$$

Une équation différentielle est du premier ordre si elle ne fait intervenir que la première dérivée y'.

3.1 Equation différentielle linéaire du premier ordre

Définition 3.2. *Une équation différentielle du premier ordre est dite linéaire si elle peut se mettre sous la forme :*

$$y' = a(x)y + b(x) \quad (E)$$

où a et b sont des fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et continues sur I.

$\longrightarrow y' - a(x)y = 0$ est l'équation sans second membre (E.S.S.M) associée à (E)

Théorème 3.3. *Soit A une primitive de a sur l'intervalle I. La solution générale de l' ESSM : $y' - a(x)y = 0$ définie sur I est $y = Kexp(A(x))$ où $K \in \mathbb{R}$*

Preuve. $y' - a(x)y = 0 \Longrightarrow \dfrac{dy}{dx} = a(x)y \Longrightarrow \dfrac{dy}{y} = a(x)dx \ (y \neq 0) \Longrightarrow \displaystyle\int \frac{dy}{y} = \int a(x)dx + C.$
Donc $\log|y| = A(x) + C \Longrightarrow |y(x)| = e^{A(x)+C} \Longrightarrow y(x) = \pm e^C e^{A(x)} \Longrightarrow y(x) = Ke^{A(x)}$ *avec* $K = \pm e^C$.
$y = 0$ *est aussi une solution, donc la solution générale de l'ESSM est* $y = Ke^{A(x)}$ *avec* $K \in \mathbb{R}$.

Théorème 3.4. *Soit y_0 une solution particulière de (E) définie sur I. Les solutions de (E) sont exactement les fonctions $y_0 + y$ où y est une solution de l'ESSM.*
C-à-d :

$$y_{(E)} = y_0 + y$$

Donc $y_{(E)} = y_0 + Kexp(A(x)),\ K \in \mathbb{R}$

Preuve. *Soit y une solution de L'ESSM et y_0 une solution particulière de (E)*

$$\begin{aligned}(y_0 + y)' - a(x)(y_0 + y) &= y_0' + y' - a(x)y_0 - a(x)y \\ &= y_0' - a(x)y_0 + y' - a(x)y \\ &= b(x) + 0 = b(x)\end{aligned}$$

Inversement, soit z une solution de (E), on va montrer que $z - y_0$ est une solution de L'ESSM :

$$\begin{aligned}(z - y_0)' - a(x)(z - y_0) &= z' - a(x)z - y_0' + a(x)y_0 \\ &= b(x) - (y_0' - a(x)y_0) = b(x) - b(x) = 0\end{aligned}$$

Le problème se ramène donc à déterminer une solution particulière de l'équation (E). La méthode de variation de la constante permet d'en déterminer une dans tous les cas.

Solution particulière par variation de la constante.
$y = Ke^{A(x)}$ est la solution générale de L'ESSM, on cherche une solution particulière de (E) sous la forme $y_0 = K(x)e^{A(x)}$.
y_0 est une solution de (E) ssi $y_0' - a(x)y_0 = b(x)$
ssi $K'(x)e^{A(x)} + K(x)A'(x)e^{A(x)} - a(x)K(x)e^{A(x)} = b(x)$
ssi $K'(x)e^{A(x)} + K(x)a(x)e^{A(x)} - a(x)K(x)e^{A(x)} = b(x)$
ssi $K'(x)e^{A(x)} = b(x)$ ssi $K'(x) = \dfrac{b(x)}{e^{A(x)}}$
On en déduit $K(x)$ en intégrant $K(x) = \displaystyle\int \frac{b(x)}{e^{A(x)}}dx$ d'où $y_0 = e^{A(x)} \displaystyle\int \frac{b(x)}{e^{A(x)}}dx$

Exemple 3.5. *Résoudre sur* $]0, +\infty[$ *l'équation différentielle*

$$xy' = 2y + x^3e^x \quad (E)$$

Sur $]0, +\infty[\ (E) \Longleftrightarrow y' = \dfrac{2y}{x} + x^2e^x$
$\longrightarrow$ *ESSM :*

$$y' = \frac{2y}{x} \Longrightarrow y = K\exp(\int \frac{2}{x}dx) = K\exp(2\log x) = K\exp(\log x^2) = Kx^2$$

Donc $y = Kx^2$.

$\longrightarrow$ *On cherche une solution particulière sous la forme* $y_p = K(x)x^2$

$$y_p' = K'(x)x^2 + 2xK(x)$$

$$y_p' = \frac{2y}{x} + x^2e^x \iff K'(x)x^2 + 2xK(x) = 2K(x)x + x^2e^x$$
$$\iff K'(x)x^2 = x^2e^x \iff K'(x) = e^x \iff K(x) = e^x$$

Donc $y_p = x^2e^x$. *La solution générale de (E) est* $y = Kx^2 + x^2e^x$, *avec* $K \in \mathbb{R}$

Proposition 3.6. *(Superposition des solutions)*
Soit l'équation

$$y' = a(x)y + b(x) \quad (E)$$

avec $b(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k(x)$. *Soient*

$$y' = a(x)y + b_k(x) \quad (E_k)$$

si y_k *est une solution particulière de* (E_k) *alors* $y = \sum_{k=1}^{n} y_k$ *est une solution particulière de (E).*

Preuve.

$$\begin{aligned} y' &= \sum_{k=1}^{n} y_k' = \sum_{k=1}^{n}(a(x)y_k + b_k(x)) = a(x)\sum_{k=1}^{n} y_k + \sum_{k=1}^{n} b_k(x) \\ &= a(x)y + b(x) \end{aligned}$$

$\boxed{3.2}$ Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, est une équation de la forme :

$$ay'' + by' + cy = g(x) \quad (E)$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ et g est une fonction continue sur un intervalle I. L'équation différentielle :

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad (E_0)$$

est appelée l'équation sans second membre associée à (E).

$\longrightarrow$ L'équation $ar^2 + br + c = 0$ est appelé l'équation caractéristique de (E_0).

Soit $\Delta = b^2 - 4ac$, le discriminant de l'équation caractéristique associée à (E_0).

Résolution de L'ESSM.

Théorème 3.7. *Soit l' ESSM suivante* $ay'' + by' + cy = 0 \qquad (E_0)$.

$\longrightarrow$*Si* $\Delta > 0$, *l'équation caractéristique possède deux racines réelles distinctes* $r_1 \neq r_2$ *et les solutions de* (E_0) *sont les*

$$y(x) = \lambda e^{r_1x} + \mu e^{r_2x} \qquad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$\longrightarrow$ *Si* $\Delta = 0$, *l'équation caractéristique possède une racine double* r_0 *et les solutions de* (E_0) *sont les*

$$y(x) = (\lambda + \mu x)e^{r_0x} \qquad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$\longrightarrow$ *Si* $\Delta < 0$*, l'équation caractéristique possède deux racines complexes* $r_1 = \alpha + i\beta$*,* $r_2 = \alpha - i\beta$ *et les solutions de* (E_0) *sont* $y(x) = e^{\alpha x}(\lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x))$ *où* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Exemple 3.8. *1) Résoudre* $y'' - y' - 2y = 0$*. L'équation caractéristique est* $r^2 - r - 2 = 0$*,* $\Delta > 0$*,* $r_1 = -1$*,* $r_2 = 2$*. D'où* $y(x) = \lambda e^{-x} + \mu e^{2x}$*,* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

2) Résoudre $y'' - 4y' + 4y = 0$*. L'équation caractéristique est* $r^2 - 4r + 4 = 0$*,* $\Delta = 0$*,* $r_0 = 2$*. D'où* $y(x) = (\lambda x + \mu)e^{2x}$*,* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$*.*

3) Résoudre $y'' - 2y' + 5y = 0$*. L'équation caractéristique est* $r^2 - 2r + 5 = 0$*,* $\Delta < 0$*,* $r_1 = 1 + 2i$*,* $r_2 = 1 - 2i$*. D'où* $y(x) = e^{x}(\lambda \cos(2x) + \mu \sin(2x))$*,* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Résolution de L'équation complète (E)

$$(E) \quad : ay'' + by' + cy = f(x)$$

Proposition 3.9. *Pour tout* $x_0 \in I$ *et* $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$*, l'équation (E) admet une solution unique* y *telle que* $y(x_0) = \alpha$ *et* $y'(x_0) = \beta$*.*

Remarque 3.10. *(Principe de superposition des solutions)*
Si $f(x)$ *est somme de plusieurs fonctions* $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x)$*. On cherche une solution particulière* z_i *de chaque équation* $ay'' + by' + cy = f_i(x)$*, et la fonction* $z = z_1 + z_2 + ... + z_n$ *est une solution particulière de* (E)*.*

Théorème 3.11. *Soit* y_1 *une solution particulière de* (E) *définie sur* I*. Les solutions de* (E) *sont exactement les fonctions* $y_1 + y$ *où* y *est une solution de l'ESSM. C-à-d*

$$y_{(E)} = y_1 + y_{(ESSM)}$$

Preuve. *On a,* $ay_1'' + by_1' + cy_1 = f(x), \forall x \in I$*.* z *est une solution de* $(E) \iff az'' + bz' + cz = ay_1'' + by_1' + cy_1$
$\iff a(z - y_1)'' + b(z - y_1)' + c(z - y_1) = 0$
$\iff z - y_1 = y$ *est une solution de l'ESSM*
$\iff z = y_1 + y$ *avec* y *est une solution de l'ESSM*

La résolution de (E) se ramène donc à la détermination d'une solution particulière de (E).
$\longrightarrow$ **Cas général** : S'il n'y a pas de solution particulière évidente, on fait la méthode de la variation de la constante :

Proposition 3.12. *(Méthode de variation de la constante : Méthode de Lagrange)*
On cherche une solution particulière sous la forme $y = A(x)y_1 + B(x)y_2$ *avec la condition de Lagrange*

$$A'(x)y_1 + B'(x)y_2 = 0$$

où y_1 *et* y_2 *sont donnés par :*

$$\begin{cases} y_1 = e^{r_1 x} \text{ et } y_2 = e^{r_2 x} \text{ si } \Delta > 0\,; \\ y_1 = xe^{rx} \text{ et } y_2 = e^{rx} \text{ si } \Delta = 0\,; \\ y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x \text{ et } y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x \text{ si } \Delta < 0. \end{cases}$$

$A'(x)$ *et* $B'(x)$ *vérifiant le système*
$\begin{cases} A'(x)y_1 + B'(x)y_2 = 0\,; \\ A'(x)y_1' + B'(x)y_2' = \frac{1}{a}f(x). \end{cases}$ *on trouve* A' *et* B' *et par intégration on trouve* A *et* B*.*

$\longrightarrow$ **Cas particuliers**

1) Cas où $f(x) = e^{\lambda x}P(x)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P(x)$ un polynôme.

On cherche une solution particulière sous la forme :

- $y = e^{\lambda x}Q(x)$, si λ n'est pas racine de $ar^2 + br + c = 0$
- $y = xe^{\lambda x}Q(x)$, si λ est une racine simple de $ar^2 + br + c = 0$
- $y = x^2e^{\lambda x}Q(x)$, si λ est une racine double de $ar^2 + br + c = 0$

avec $Q(x)$ un polynôme tel que $d°Q = d°P$.

2) Cas où $f(x) = P(x)$, où P est un polynôme.

On applique le cas précédent avec $\lambda = 0$

- $y = Q(x)$, si 0 n'est pas racine de $ar^2 + br + c = 0$
- $y = xQ(x)$, si 0 est une racine simple de $ar^2 + br + c = 0$
- $y = x^2Q(x)$, si 0 est une racine double de $ar^2 + br + c = 0$

où $Q(x)$ un polynôme tel que $d°Q = d°P$.

3) Cas où $f(x) = e^{\alpha x}P(x)\cos\beta x$ ou bien $f(x) = e^{\alpha x}P(x)\sin\beta x$ avec $P(x)$ un polynôme, $\alpha \in \mathbb{R}$,$\beta \in \mathbb{R}^*$

On cherche une solution particulière sous la forme :

- $y = e^{\alpha x}(P_1(x)\cos\beta x + P_2(x)\sin\beta x)$, si $\alpha + i\beta$ n'est pas racine de $ar^2 + br + c = 0$
- $y = e^{\alpha x}(xP_1(x)\cos\beta x + xP_2(x)\sin\beta x)$, si $\alpha + i\beta$ est une racine de $ar^2 + br + c = 0$

avec $P_1(x)$ et $P_2(x)$ sont deux polynôme tels que $d°P = d°P_1 = d°P_2$.

Exemple 3.13. *1) Résoudre l'équation différentielle*

$$y'' + 4y' + 4y = x + e^{-2x} \quad (E)$$

$\longrightarrow$ *ESSM :* $y'' + 4y' + 4y = 0$ *l'équation caractéristique :* $r^2 + 4r + 4 = 0 \iff (r+2)^2 = 0 \ (*)\ r = -2$
La solution générale de L'ESSM est $y = (Ax + B)e^{-2x}$ *avec* $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.
$\longrightarrow$ *Soient les équations :*

$$y'' + 4y' + 4y = x \quad (E_1)$$

$$y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \quad (E_2)$$

Puisque 0 *n'est pas racine de (*), on cherche une solution particulière de* (E_1) *sous la forme* $y_1 = ax+b$
On a : $y_1' = a$ *et* $y_1'' = 0$
$y_1'' + 4y_1' + 4y_1 = x \iff 4a + 4ax + 4b = x \iff \begin{cases} 4a=1\,; \\ 4a+4b=0. \end{cases}$
$\iff a = \frac{1}{4}$ *et* $b = \frac{-1}{4}$ *donc* $y_1 = \frac{x-1}{4}$.
Puisque -2 *est une solution double de l'équation caractéristique, on chereche une solution particulière de* (E_2) *sous la forme* $y_2 = \alpha x^2e^{-2x}$
$y_2' = 2\alpha xe^{-2x} - 2\alpha x^2e^{-2x}$, $y_2'' = 2\alpha e^{-2x} - 4\alpha xe^{-2x} - 4\alpha xe^{-2x} + 4\alpha x^2e^{-2x}$.
$y_2''+4y_2'+4y_2 = e^{-2x} \iff e^{-2x}(2\alpha-8\alpha x+4\alpha x^2+8\alpha x-8\alpha x^2+4\alpha x^2) = e^{-2x} \iff 2\alpha e^{-2x} = e^{-2x} \iff$
$2\alpha = 1 \iff \alpha = \dfrac{1}{2}$
$y_2 = \dfrac{x^2}{2}e^{-2x}$.

Donc une solution particulière de (E) est $y_p = y_1 + y_2 = \frac{x-1}{4} + \frac{x^2}{2}e^{-2x}$.
La solution générale de (E) est alors

$$y = (Ax+B)e^{-2x} + \frac{x-1}{4} + \frac{x^2}{2}e^{-2x}$$

avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$
2) Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^{2x}} \quad (E)$$

L' ESSM : $y'' + 3y' + 2y = 0$.
L'équation caractéristique : $r^2 + 3r + 2 = 0 \iff r = -1$ et $r = -2$. La solution générale de l'ESSM est

$$y = Ae^{-x} + Be^{-2x}, \text{ avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

On cherche une solution particulière de (E) sous la forme $y = A(x)e^{-x} + B(x)e^{-2x}$ avec la condition de Lagrange $A'(x)e^{-x} + B'(x)e^{-2x} = 0$ et $A'(x)$ et $B'(x)$ vérifient le système :

$$\begin{cases} A'(x)e^{-x} + B'(x)e^{-2x} = 0 \text{ (1) ;} \\ -A'(x)e^{-x} - 2B'(x)e^{-2x} = \dfrac{1}{1+e^{2x}} \text{ (2).} \end{cases}$$

$(1) + (2) \longrightarrow -B'(x)e^{-2x} = \dfrac{1}{1+e^{2x}} \Longrightarrow B'(x) = -\dfrac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$.
$B(x) = -\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}dx = -\frac{1}{2}\log(1+e^{2x})$
$2 \times (1) + (2)$ *implique* $A'(x)e^{-x} = \dfrac{1}{1+e^{2x}} \Longrightarrow A'(x) = \dfrac{e^x}{1+e^{2x}}$
Posons $t = e^x$, $dt = e^x dx$. Donc $A(x) = \displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx = \int \frac{dt}{1+t^2} = \arctan(t) = \arctan(e^x)$
Une solution particulière est

$$y_p = \arctan(e^x)e^{-x} - \frac{1}{2}\log(1+e^{2x})e^{-2x}$$

La solution générale de (E) est

$$y = Ae^{-x} + Be^{-2x} + \arctan(e^x)e^{-x} - \frac{1}{2}\log(1+e^{2x})e^{-2x}$$

Exercice : Résoudre les équations différentielles suivantes :
$y'' + y = x + e^x \cos 2x$
$y'' + y = \dfrac{1}{\sin^3 x}$.

3.3 Exercices

Exercice 9. 1. Calculer $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}}{x+2}dx$.

2. Intégrer l'équation différentielle suivante :

$$(x+2)y' - y\sqrt{x+1} = 0.$$

Exercice 10. Intégrer l'équation suivante sur $\mathbb{R}^*$:

$$xy' - y = \frac{-x}{\sin(\frac{y}{x})}$$

Exercice 11. On considère l'équation différentielle linéaire suivante :

$$(E): \qquad (1+x^2)y' + x^2 y = 1 + x^2 \arctan(x).$$

1. Vérifier que $y_0 = \arctan(x)$ est une solution particulière de (E).
2. Déduire la solution générale de (E).

Exercice 12. Résoudre les équations différentielles suivantes sur l'intervalle I :

1. $y' + 2y = x$, $I = \mathbb{R}$.
2. $y' \cos(x) + y \sin(x) = 1$, $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
3. $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$, $I = \mathbb{R}$.
4. $xy' + 2y = \dfrac{x}{x^2+1}$, $I = \mathbb{R}^*$.

Exercice 13. On considère l'équation différentielle

$$y'' + 2y' + 4y = xe^x. \qquad (E)$$

1. Déterminer les solutions de (E).
2. Déterminer les solutions h de (E) qui vérifiant $h(0) = h'(0) = 0$.
3. Soit $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable vérifiant

$$t^2 f''(t) + 3tf'(t) + 4f(t) = t\ln(t)$$

   On pose $g(x) = f(e^x)$.
   – (a) Vérifier que g est solution de (E)
   – (b) En déduire l'expression de f.

Exercice 14. Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' + y' - 2y = xe^x + \cos(x)$.
2. $y'' + 2y' + y = ch(x)$.
3. $y'' + y = \tan(x)$.
4. $y'' + y = \dfrac{1}{\sin^3(x)}$.

CHAPITRE 4

Les Séries Numériques

Le but est de donner un sens précis à une somme infinie de termes.

4.1 Définitions et Propriétés

Soit u_n, $n \geqslant 0$, une suite réelle. On pose $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, la somme des premiers termes jusqu'a l'ordre n.

Définition 4.1. *On appelle série attachée à la suite u_n et on la note par $\sum u_n$, la suite S_n définie par $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.*
u_n est appelé le terme général de la série.

La série associée à u_n est notée par $\sum u_n$ ou bien par $u_0 + u_1 + ... + u_n + ...$

Définition 4.2. *a) La série $\sum u_n$ est dite convergente si la suite S_n a une limite finie quand $n \mapsto +\infty$. Dans ce cas $S = \lim_{n \mapsto +\infty} S_n$ est appelée la somme de la série, on la note par $S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$. On dit aussi que la série $\sum u_n$ converge et sa somme est S.*

b) La série $\sum u_n$ est dite divergente si la suite S_n n'a pas de limite finie (c'est-à dire S_n n'a pas de limite, ou bien admet une limite infinie)

Exemple 4.3. *1) Soit la série de terme général $u_n = \frac{1}{3^n}$, $n > 0$. On a :*
$S_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3}\frac{1-(\frac{1}{3})^n}{1-\frac{1}{3}}$.
$S_n = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{3^n})$, *donc* $\lim_{n \mapsto +\infty} S_n = \frac{1}{2}$.
Donc la série $\sum \frac{1}{3^n}$ est convergente de somme $\frac{1}{2}$.
2) Série harmonique. C'est la série dont le terme général est de la forme $u_n = \frac{1}{n}$, où $n \in \mathbb{N}^*$. Cette série n'est pas convergente.

Définition 4.4. *(Nature et Caractère)*
Déterminer la nature ou le caractère d'une série c'est déterminer si elle est convergente ou divergente

Définition 4.5. *(Série déinie à partir d'un certain rang)*

Soit $(u_n)_{n\geqslant p}$ *une suite définie à partir de* p. *On pose* $S_n = \sum_{k=p}^{n} u_k$. *On dit que la série* $\sum_{n\geqslant p} u_n$ *converge si et seulement si la suite* S_n *admet une limite finie.*

Définition 4.6. *Soit* $\sum u_n$ *une série qui converge, et soit* S *sa somme. On pose* $R_n = S - S_n$ *où* $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ *et on la note par* $R_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} u_k$. R_n *est appelée le reste d'ordre* n *de la série* $\sum u_n$. *On a* $\lim_{n\mapsto+\infty} R_n = 0$

Proposition 4.7. *a) Si la série* $\sum u_n$ *converge alors* $\lim_{n\mapsto+\infty} u_n = 0$.

b) La réciproque est fausse : La série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ *diverge malgré que* $\lim_{n\mapsto+\infty} \frac{1}{n} = 0$

Preuve. *a) On a* $u_n = S_n - S_{n-1}$ *et* $\lim_{n\mapsto+\infty} S_n = S$ *donc*

$$\lim_{n\mapsto+\infty} u_n = \lim_{n\mapsto+\infty} S_n - \lim_{n\mapsto+\infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

b) On pose $v_n = \frac{1}{n}$ *et* $S_n = \sum_{k=1}^{n} v_k = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$.
$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n} \geqslant \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + ... + \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$
Donc $S_{2n} - S_n \geqslant \frac{1}{2}$, *d'où la suite* S_n *ne peut pas converge sinon on obtient* $0 \geqslant \frac{1}{2}$ *ce qui est absurde. Donc la série* $\sum \frac{1}{n}$ *diverge.*

Proposition 4.8. *Si les séries* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *convergent et leurs sommes* S *et* S', *alors on :*
a) La série $\sum(u_n + v_n)$ *converge et sa somme est* $S + S'$.
b) La série $\sum(\lambda u_n)$ *converge et sa somme est* λS, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Preuve. *a)* $u_0 + v_0 + u_1 + v_1 + ... + u_n + v_n = u_0 + u_1 + ... + u_n + v_0 + v_1 + ... + v_n = S_n + S'_n \to S + S'$ *qd* $n \to +\infty$.
b)$\lambda u_0 + \lambda u_1 + ... + \lambda u_n = \lambda(u_0 + u_1 + ... + u_n) = \lambda S_n \to \lambda S$ *qd* $n \to +\infty$.

Remarque 4.9. $\forall \lambda \in \mathbb{R}^*$, *les séries* $\sum u_n$ *et* $\sum \lambda u_n$ *sont de même nature. En effet : si* $\sum u_n$ *converge alors la série* $\sum \lambda u_n$ *converge. Réciproquement, si la série* $\sum \lambda u_n$ *converge alors la série* $\sum \lambda^{-1}\lambda u_n$ *converge, c-à-d la série* $\sum u_n$ *converge.*

Cas particuliers a) Soit $\sum u_n$ une série telle que $u_n = a_n - a_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, alors :

$$\text{la série } \sum u_n \text{ converge} \iff \text{la suite } a_n \text{ converge.}$$

Dans ce cas, on a $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = a_0 - \lim_{n\to\infty} a_n$.

En effet $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = a_0 - a_1 + a_1 - a_2 + ... + a_{n_1} - a_n + a_n - a_{n+1}$, implique que $S_n = a_0 - a_{n+1}$ d'où la série $\sum u_n$ converge $\iff$ la suite S_n admet une limite finie $\iff$ la suite a_n admet une limite finie.

Exemple 4.10. $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$ *on a* $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. *On pose* $a_n = \frac{1}{n}$ *on a* $u_n = a_n - a_{n+1}$ $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ *donc la série* $\sum u_n$ *converge et on a* $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = a_1 - \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = a_1 = 1$

b) Série géométrique. Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $q \in \mathbb{R}$. On appelle série géométrique de premier terme a et de raison q, la série $q^n a$, c-à-d, la série : $a + qa + q^2 a + ... + q^n a + ...$

La série $\sum q^n a$ converge si et seulement si $|q| < 1$. Dans ce cas on a : $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n a = \frac{a}{1-q}$ donc $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ si $|q| < 1$.

En effet : $S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k a = a + qa + q^2 a + ... + q^n a = a(1 + q + q^2 + ... + q^n)$

Si $q = 1$ on a $S_n = (n+1)a$ donc la série diverge.

Si $q \neq 1$ on a $S_n = a\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Si $|q| < 1$ alors $\lim_{n\to+\infty} q^{n+1} = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{a}{1-q}$.

Si $q > 1$ $\lim_{n\to+\infty} q^{n+1} = +\infty$ donc S_n diverge d'où $\sum u_n$ diverge.

Si $q \leqslant -1$ alors S_n n'a pas de limite quand $n \to +\infty$, donc la série $\sum q^n a$ diverge.

4.2 Série à termes positifs

Définition 4.11. *Une série u_n est dite à termes positifs si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $u_n \geqslant 0$.*

Proposition 4.12. *Pour qu'une série $\sum u_n$ à termes positifs converge, il faut et il suffit que sa somme partielle S_n soit majorée.*

Preuve. *On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, on a $S_{n+1} = S_n + u_{n+1} \geqslant S_n$ car $u_{n+1} \geqslant 0$ donc $S_{n+1} \geqslant S_n$. La suite S_n est alors croissante, donc pour qu'elle admet une limite finie il faut et il suffit qu'elle soit majorée.*

Définition 4.13. *(Critère de comparaison des séries)*
Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs, tel que $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, alors on a

1. *Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge,*
2. *Si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge.*

Preuve. *1) On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $S'_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$.*
$0 \leqslant u_k \leqslant v_k$ donc $0 \leqslant S_n \leqslant S'_n$
$\sum v_n$ converge implique que la suite S'_n converge donc S'_n est majorée, or $S_n \leqslant S'_n$ donc S_n est majorée, ce qui donne S_n converge ce qui implique que la série $\sum u_n$ converge.
2) est simplement la contraposée de (1)

Exemple 4.14. *1) $\frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{n(n-1)}$, donc la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge car la série $\sum \frac{1}{n(n-1)}$ est converge.*

2) $\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$, donc la série $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ est divergente.

Définition 4.15. *On dit que les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont équivalente et on note $u_n \sim_\infty v_n$ quand $n \mapsto +\infty$ si $\lim_{n\mapsto+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$*

Proposition 4.16. *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs avec $u_n \sim v_n$ quand $n \mapsto +\infty$, alors on a :*

$$\sum u_n \text{ est convergente} \iff \sum v_n \text{ est convergente.}$$

Preuve. *Puisque* $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$, *alors* $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que si* $n \geqslant n_0$ *on a* $\mid \dfrac{u_n}{v_n} - 1 \mid < \dfrac{1}{2}$ *donc* $\dfrac{1}{2} < \dfrac{u_n}{v_n} < \dfrac{3}{2}$, $\forall n \geqslant n_0$, $\Longrightarrow \forall n \geqslant n_0 : \frac{1}{2}v_n < u_n < \frac{3}{2}$.

- *Si* $\sum u_n$ *convergente alors* $\sum \dfrac{1}{2}v_n$ *convergente, d'où* $\sum v_n$ *convergente.*
- *Réciproquement, si* $\sum v_n$ *convergente alors* $\sum \dfrac{3}{2}u_n$ *convergente donc* $\sum u_n$ *convergente.*

Proposition 4.17. *(Critère de Cauchy)*
Soit $\sum u_n$ *une série à termes positifs telle que* $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$ *alors :*

1. *Si* $l < 1$ *: la série* $\sum u_n$ *converge.*
2. *Si* $l > 1$ *: la série* $\sum u_n$ *diverge.*
3. *Si* $l = 1$ *: ce critère ne donne rien.*

Exemple 4.18. *Pour* $a > 0$ *et* $n \in \mathbb{N}^*$ *on pose* $u_n = (a + \dfrac{1}{n})^n$. *Trouver la nature de la série* $\sum u_n$.

- *On a* $\sqrt[n]{u_n} = a + \dfrac{1}{n} \Rightarrow \lim\limits_{n\mapsto+\infty} \sqrt[n]{u_n} = a$.

$\star$ *Si* $a > 1$ *alors* $\sum u_n$ *diverge.*
$\star$ *Si* $a < 1$ *alors* $\sum u_n$ *converge.*
$\star$ *Si* $a = 1$ *alors* $u_n = (a + \dfrac{1}{n})^n = e^{n\log(1+\frac{1}{n})}$, $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n = e \neq 0$ *donc* $\sum u_n$ *diverge.*

Proposition 4.19. *(Critère de d'Alembert)*
Soit $\sum u_n$ *une série à termes positifs telle que* $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$

1. *Si* $l < 1$ *: la série* $\sum u_n$ *converge ;*
2. *Si* $l > 1$ *: la série* $\sum u_n$ *diverge.*

$\triangle$ Si $l = 1$, ce critère ne donne rien.

Exemple 4.20. *a)* $u_n = \dfrac{n^n}{n!}$ *on a* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(n+1)^n}{n^n} = (\dfrac{n+1}{n})^n = e^{n\log(1+\frac{1}{n})}$.
$\lim\limits_{n\mapsto+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = e > 1$ *d'où* $\sum u_n$ *diverge.*

b) $u_n = \dfrac{b^n}{n!}$ *avec* $b > 0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{b}{n+1} \longrightarrow 0 < 1$ *donc* $\sum u_n$ *converge.*

Proposition 4.21. *(Comparaison avec une intégrale)*
Soit $f : [1, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$ *une fonction, positive décroissante et continue. La série* $\sum f(n)$ *et* $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx$ *sont de même nature.*

Proposition 4.22. *(Série de Riemann)*
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, *la série* $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ *converge si* $\alpha > 1$ *et diverge si* $\alpha \leqslant 1$.

Preuve. *Pour* $n \in \mathbb{N}^*$ *on pose* $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

- *Si* $\alpha \leqslant 0$ *alors* $u_n = n^{-\alpha}$ *ne converge pas vers* 0 *qd* $n \mapsto +\infty$ *donc la série* $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ *diverge.*
- *Si* $\alpha > 0$ *on pose* $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ *pour* $x \in [1, +\infty[$, $f'(x) = -\dfrac{\alpha}{x^{\alpha+1}} < 0$ *donc* f *est décroisante, positive et continue d'où* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx$ *et* $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ *sont de même nature, or* $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx$ *converge si* $\alpha > 1$ *et diverge si* $\alpha \leqslant 1$, *d'où le résultat.*

4.3 Série à termes réels

Définition 4.23. *La série* $\sum u_n$ *est dite absolument convergente si la série* $\sum |u_n|$ *est convergente.*

Proposition 4.24. *Si la série est absolument convergente alors elle est convergente.*

Remarque 4.25. *i) La réciproque de la proposition précédente est fausse.*
ii) Ce résulat, permet parfois de ramener le problème à l'étude de série à termes positifs.

Exemple 4.26. *a) Soit* $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^4}$ *on a* $|u_n| = \dfrac{1}{n^4}$, *la série* $\sum \dfrac{1}{n^4}$ *converge, donc la série* $\sum u_n$ *absolument convergente donc converge.*
b) Soit $v_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ *on a* $|v_n| = \dfrac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$. *La série* $\sum \dfrac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ *diverge, donc la série* $\sum v_n$ *n'est pas absolument convergente.*

Définition 4.27. *La série* $\sum u_n$ *est dite altermée si on a :*

$$u_n = (-1)^n a_n,\ \forall n \in \mathbb{N} \text{ avec } a_n \geqslant 0\ \forall n \in \mathbb{N}$$

ou bien si on a :

$$u_n = (-1)^{n+1} a_n \text{ avec } a_n \geqslant 0\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Théorème 4.28. *(de Leibnitz)*
Soit $\sum (-1)^n u_n$ *une série alternée avec* $u_n \geqslant 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. *Si la suite* u_n *est décroissante et si* $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} u_n = 0$, *alors la série* $\sum (-1)^n u_n$ *est convergente et on a* $|R_n| \leqslant u_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ *où* $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k$

Exemple 4.29. *Etudier la série* $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.
C'est une série alternée, on a $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ *est décroissante et* $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$ *donc par le Théorème de Leibnitz, la série* $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ *est convergente.*

Définition 4.30. *Une série qui converge sans être absolument convergente est dite semi-convergente.*

Ex : $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

4.4 Exercices

Exercice 15. Donner la nature des séries de terme général :

1) $u_n = \dfrac{n}{3n+1}$, 2) $u_n = \left(\dfrac{3}{2}\right)^n$, 3) $u_n = e^{-\frac{1}{n^2}}$.

4) $u_n = \dfrac{1}{5n^{\frac{3}{2}}}$, 5) $u_n = \dfrac{2}{n^{\frac{1}{2}}}$, 6) $u_n = \sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

7) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$, 8) $u_n = \arcsin\left(\dfrac{2n}{4n^3-1}\right)$, 9) $u_n = \log\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.

10) $u_n = \log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$, 11) $u_n = \log(n)\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\log\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$, 12) $u_n = \frac{n^2}{n!}$.

13) $u_n = \left(1+\frac{a}{n}\right)^{-n^2}$, 14) $u_n = \frac{a^n}{n^\alpha n!}$ $\alpha \in \mathbb{R}$ et $a > 0$, 15) $u_n = \left(\frac{n}{4n-1}\right)^{2n}$.

16) $u_n = \left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^{n^2}$, 17) $u_n = \frac{(-1)^n}{2n-1}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, 18) $u_n = \frac{(-1)^n}{n^2+\sin(n^2)}$.

19) $u_n = \frac{(-1)^n}{n+e^{-n}}$, 20) $u_n = (-1)^n\frac{\log(n)}{n} + \frac{1}{n\log(n)}$.

Exercice 16. Donner la nature et calculer la somme des séries de terme général :

1) $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$, «« $n > 0$,

2) $u_n = \arctan\left(\frac{1}{1+n+n^2}\right)$, (Ind : $\arctan(a) - \arctan(b) = \arctan\left(\frac{a-b}{1+ab}\right), ab > -1$).

Exercice 17. 1. Donner la nature et la valeur éventuelle de $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\log(t)}$.

2. Soit la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n\log(n)}$.

   - a) $\sum u_n$ est elle absolument convergente.
   - b) Donner la nature de $\sum u_n$. Conclure.

CHAPITRE 5

Fonctions de deux variables réelles

Dans ce chapitre, nous allons étudier les fonctions de deux variables, c'est-à-dire, les applications d'une partie $A \subset \mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Notamment, nous allons étendre les notions de limites, continuité et dérivabilité qui ont été définies, dans le cours "Analyse 1", pour les fonctions d'une partie de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. De plus, nous allons définir l'intégrale d'une fonction de deux variables continue sur un domaine $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ et de donner des méthodes de calculs.

5.1 Norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$

Définition 5.1. *1. On appelle norme euclidienne d'un vecteur $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ le nombre réel noté $\|u\|$ et défini par*

$$\|u\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

2. On appelle distance euclidienne de deux vecteurs $u, v \in \mathbb{R}^2$ le nombre réel noté $d(u, v)$ et défini par

$$d(u, v) = \|u - v\|.$$

Il est clair que si $u = (x, y)$, on a

$$|x| \leqslant \|u\| \quad et \quad |y| \leqslant \|u\|.$$

Remarque 5.2. *La norme euclidienne généralise la valeur absolue. En effet, si $u = (x, 0)$ ou $u = (0, x)$ alors*

$$\|u\| = |x|.$$

Proposition 5.3. *Soient $u, v \in \mathbb{R}^2$ et $x \in \mathbb{R}$. Les propriétés suivantes sont vérifiées*

1. $\|u\| \geqslant 0$.
2. $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$.
3. $\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$.
4. $\|xu\| \leqslant |x|\|u\|$.

La proposition suivante est une réformulation de la proposition ci-dessus.

Proposition 5.4. *Soient $u, v \in \mathbb{R}^2$ et $x \in \mathbb{R}$. Les propriétés suivantes sont vérifiées*

1. $d(u, v) \geqslant 0$.
2. $d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$.

3. $d(u,v) = d(v,u)$.
4. $d(u,w) \leqslant d(u,v) + d(v,w)$ *(inégalité triangulaire).*

Définition 5.5. *Soient* $u, v, w \in \mathbb{R}^2$ *et* $r \in \mathbb{R}^+$.

1. *La boule ouverte de centre* u_0 *et de rayon* r *est l'ensemble noté* $B(u_0, r)$ *et défini par*
$$B(u_0, r) = \{v \in \mathbb{R}^2,\ d(u_0, v) < r\}.$$
2. *La boule fermé de centre* u_0 *et de rayon* r *est l'ensemble noté* $\bar{B}(u_0, r)$ *et défini par*
$$\bar{B}(u_0, r) = \{v \in \mathbb{R}^2,\ d(u_0, v) \leqslant r\}.$$
3. *Un ouvert de* $\mathbb{R}^2$ *est une partie* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *telle que, pour tout* $u \in \Omega$ *il existe* $r > 0$ *tel que* $B(u, r) \subset \Omega$.

Intuitivement, un ouvert de $\mathbb{R}^2$ est une partie dans laquelle tout point a de la place autour de lui, on peut se deplacer à partir de chaque point dans tout les directions sans sortir de l'ouvert.

Exemple 5.6. 1. *Toute boule ouverte de* $\mathbb{R}^2$ *est un ouvert de* $\mathbb{R}^2$.

2. *Si* $a < b$ *et* $c < d$, *le rectangle (ouvert)* $]a, b[\times]c, d[$ *est un ouvert de* $\mathbb{R}^2$.
Par contre, $[a, b] \times [c, d]$ *n'est pas un ouvert car toute boule ouverte de centre (a,c) rencontre le complémentaire de* $[a, b] \times [c, d]$.

5.2 Limite d'une fonction définie sur une partie de $\mathbb{R}^2$

Définition 5.7. *Une fonction de deux variables réelles est une application d'une partie* $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$:
$$\begin{aligned} f : \mathcal{A} &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto f(x, y). \end{aligned}$$
Une telle fonction peut donner lieu à une représentation graphique dans $\mathbb{R}^2$ *donnée par la surface* $S_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ z = f(x, y)\}$.

Jusqu'à la fin de cette section, les fonctions considérées sont définies sur une partie $\mathcal{A}$ de $\mathbb{R}^2$ et $u_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ un point adhérent à $\mathcal{A}$, c'est à dire, qu'il existe une suite $((x_n, y_n))_{n \geqslant n_0}$ de poins de $\mathcal{A}$ qui converge vers u_0, c'est à dire,
$$\lim_{n \to +\infty} x_n = x_0 \ \text{ et } \ \lim_{n \to +\infty} y_n = y_0.$$

Exemple 5.8. 1. *Le point* $(1, 0)$ *est adhérent à la boule ouverte* $B((0, 0), 1)$. *En effet, la suite* $((1 - \frac{1}{n}, 0))_{n \geqslant 1}$ *est suite de point de* $B((0, 0), 1)$ *et*
$$\lim_{n \to +\infty} (1 - \frac{1}{n}) = 1 \quad et \quad \lim_{n \to +\infty} 0 = 0.$$

2. *Le point* $(2, 0)$ *n'est pas adhérent à* $B((0, 0), 1)$.

Définition 5.9. *On dira que f tend vers ℓ quand $u = (u_1, u_2)$ tend vers u_0 si :*

$$\forall \varepsilon, \exists \delta > 0, \forall u \in \mathcal{A}, \ (d(u, u_0) \leqslant \delta \Rightarrow |f(u) - \ell| < \varepsilon).$$

Le réel ℓ est aussi appelé limite de f en u_0. On note $\lim\limits_{u \to u_0} f(u) = l$

Exemple 5.10. *1) On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par*

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

et soit $u_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Nous allons montrer que f tend vers $x_0^2 + y_0^2$ quand u tend vers u_0.
Soit $\varepsilon > 0$, on cherche $\delta > 0$ tel que si $\|u - u_0\| \leqslant \delta$ alors $\|x^2 + y^2 - x_0^2 - y_0^2\| \leqslant \varepsilon$. Puisque u doit être proche de u_0, on suppose que $\|u - u_0\| \leqslant 1$. Ceci entraîne, en particulier, que

$$\|u\| \leqslant \|u - u_0\| + \|u_0\| \leqslant 1 + \|u_0\|.$$

D'une autre coté,

$$\begin{aligned}
|f(u) - f(u_0| &= |x^2 + y^2 - x_0^2 - y_0^2| \\
&\leqslant |x^2 - x_0^2| + |y^2 - y_0^2| \\
&\leqslant |x - x_0||x + x_0| + |y - y_0||y + y_0| \\
&\leqslant \|u - u_0\|(|x + x_0| + |y + y_0|) \\
&\leqslant \|u - u_0\|(|x| + |y| + |x_0| + |y_0|) \\
&\leqslant \|u - u_0\|(2(1 + \|u_0\|) + 2\|u_0\|).
\end{aligned}$$

Prenons $\delta = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{2(1+2\|u_0\|)}\right)$. Si $\|u - u_0\| \leqslant \delta$ alors $\|u - u_0\| \leqslant 1$ et $\|u - u_0\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2(1+2\|u_0\|)}$ et donc

$$|f(u) - f(u_0)| \leqslant \varepsilon.$$

Il y a une relation étroite entre les limites des suites de $\mathbb{R}^2$ et limites des fonctions de deux variables.

2) Soit la fonction $f(x, y) = (x^2 + y^2)\sin(\frac{1}{x^2+y^2})$. On a $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$

Proposition 5.11. *La fonction f tend vers ℓ quand u tend vers u_0 si et seulement si, pour toute suite $((x_n, y_n))_{n\geqslant 0}$ de $\mathcal{A}\backslash\{u_0\}$ qui converge u_0, on a*

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n, y_n) = \ell.$$

La carectérisation des limites par les suites sert surtout à montrer que certaines fonctions de deux variables n'ont pas de limites en certains points.

Exemple 5.12. *En utilisant la contraposée de la proposition précedente, nous allons montrer que la fonction $f : \mathbb{R}^2\backslash\{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$ définie par*

$$f(x, y) = \frac{y^2}{x^2 + y^2}$$

n'admet pas de limite en (0,0). En effet, les deux suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définies par $u_n = (0, \frac{1}{n})$ et $v_n = (\frac{1}{n}, 0)$ convergent vers $(0, 0)$ alors que

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = 1 \quad et \quad \lim_{n\to+\infty} f(v_n) = 0.$$

Proposition 5.13. *On suppose que* $\lim_{u\to u_0} f(u) = \ell_1$ *et* $\lim_{u\to u_0} g(u) = \ell_2$*. Alors :*

1. $\lim_{u\to u_0}(f+g)(u) = \ell_1 + \ell_2$,
2. $\lim_{u\to u_0}(fg)(u) = \ell_1\ell_2$,
3. $\lim_{u\to u_0}(\alpha f)(u) = \alpha\ell_1$,
4. *si* $\ell_2 \neq 0$ *et* $g(u) \neq 0$, $\lim_{u\to u_0}\left(\frac{f}{g}\right)(u) = \frac{\ell_1}{\ell_2}$.

$\boxed{5.3}$ Fonctions continues sur une partie de $\mathbb{R}^2$

Les fonctions considérées dans cette section sont définies sur une partie $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$.

Définition 5.14. *On dira que* f *est continue en* $u_0 \in \mathcal{A}$ *si* $\lim_{u\to u_0} f(u) = f(u_0)$*. On notera* $\mathcal{C}(\mathcal{A}, \mathbb{R})$ *l'ensemble des fonctions continues en tout point de* $\mathcal{A}$*.*

Proposition 5.15. *Si* f *et* g *sont continues en* $u_0 \in \mathcal{A}$ *alors* $f+g$ *et* αf *sont continues en* u_0 $(\alpha \in \mathbb{R})$*. Si en plus,* $g(u) \neq 0$ *pour tout* $u \in \mathcal{A}$*, alors* $\frac{f}{g}$ *est continue* u_0*.*

Proposition 5.16. *Soit* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$*. Si* $f \in \mathcal{C}(\mathcal{A}, \mathbb{R})$ *et* $\phi \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ *telle que* $f(\mathcal{A}) \subset I$ *alors* $\phi \circ f \in \mathcal{C}(\mathcal{A}, \mathbb{R})$*.*

Exemple 5.17. *On considère la fonction* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Cette fonction est clairement continue en tout point $(x,y) \neq (0,0)$*. Etudions la continuité en* $(0,0)$*. Pour cela, on considère une suite* $((x_n,y_n))_{n\geqslant 0} de \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ *telle que* $\lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} y_n = 0$*. On a pour tout* $n \in \mathbb{N}$*,*

$$x_n^2y_n^2 \leqslant \frac{1}{2}(x_n^2+y_n^2)^2,$$

et donc

$$|f(x_n,y_n)| \leqslant \frac{1}{2}(x_n^2+y_n^2)^2.$$

cette inégalité implique clairement que $\lim_{n\to+\infty} f(x_n,y_n) = 0$*. Alors,* $lim_{u\to(0,0)} f(u) = f(0,0)$ *et donc* f *est continue en* $(0,0)$*. Finalement,* f *est continue sur* $\mathbb{R}^2$

$\boxed{5.4}$ Dérivabilité d'une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$

Pour définir la notion de dérivabilité d'une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, appelée aussi difféfetiabilité, nous allons rappeler la notion de dérivabilité d'une fonction d'une seule variable et essayer aprés d'étendre, d'une manière naturelle, cette notion aux fonctions de deux variables. Soit $g : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$ et soit $x_0 \in I$. Rappelons que g est dite dérivable en x_0 s'il existe un réel ℓ tel que

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} = \ell,$$

ou d'une manière équivalente

$$\lim_{h\to 0} \frac{|g(x_0+h) - g(x_0) - \ell h|}{|h|} = 0.$$

On considère, maintenant, une fonction f définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et soit $u_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$. Puisque la norme euclidienne généralise la valeur absolue, il est alors naturel de poser la définition suivante. On dira que f est différentiable en u_0 s'il existe $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{|f(x_0+h_1, y_0+h_2) - f(u_0) - \ell_1 h_1 - \ell_2 h_2|}{\|(h_1,h_2)\|} = 0.$$

En prenant dans cette équation, respectivement, $h_1 = 0$ et $h_2 = 0$, on déduit que

$$\lim_{h\to 0} \frac{|f(x_0, y_0+h) - f(u_0) - \ell_2 h|}{|h|} = 0,$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{|f(x_0+h, y_0) - f(u_0) - \ell_1 h|}{|h|} = 0,$$

soit

$$\ell_1 = \lim_{h\to 0} \frac{|f(x_0+h, y_0) - f(u_0)}{h} = 0 \text{ et } \ell_2 = \lim_{h\to 0} \frac{|f(x_0, y_0+h) - f(u_0)}{h} = 0.$$

Nous prouvons, maitenant, définir la notion de différentiabilité d'une manière précise

Définition 5.18. *Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ouvert et $u_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$.*

1. *On appell dérivées partielles de f en u_0 les deux nombres réels (quand ils exitent) définis par*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(u_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(u_0)}{h},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(u_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0, y_0+h) - f(u_0)}{h}.$$

2. *On dira que f est différentiable en u_0 si $\frac{\partial f}{\partial x}(u_0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(u_0)$ existent et*

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{|f(x_0+h_1, y_0+h_2) - f(u_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(u_0)h_1 - \frac{\partial f}{\partial y}(u_0)h_2|}{\|(h_1,h_2)\|},$$

où $\|(h_1,h_2)\| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$.

Remarque 5.19. *L'hypothèse que la domaine de définition de f est un ouvert est nécessaire car f doit être définie sur une boule ouverte de centre (x_0, y_0).*

Exemple 5.20. *On considère les fonctions suivantes*

1. $f(x,y) = x + |y|$
2. $g(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$
3. $h(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4y^4}{\sqrt{x^2+y^2}} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Etudier la différentiabilité des fonctions f, g et h en $(0,0)$.

Proposition 5.21. *Si f est differentiable en u_0 alors f est continue en u_0.*

Proposition 5.22. *Soient f et g deux fonctions differentiables en u_0 alors f est continue en u_0 et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors :*

1. *$f+\alpha g$ est différentiable en u_0 et on a*

$$\frac{\partial(f+\alpha g)}{\partial x}(u_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(u_0)+\alpha\frac{\partial g}{\partial x}(u_0),$$

$$\frac{\partial(f+\alpha g)}{\partial y}(u_0)=\frac{\partial f}{\partial y}(u_0)+\alpha\frac{\partial g}{\partial y}(u_0).$$

2. *fg est différentiable en u_0 et on a*

$$\frac{\partial(fg)}{\partial x}(u_0)=g(u_0)\frac{\partial f}{\partial x}(u_0)+f(u_0)\frac{\partial g}{\partial x}(u_0),$$

$$\frac{\partial(fg)}{\partial x}(u_0)=g(u_0)\frac{\partial f}{\partial y}(u_0)+f(u_0)\frac{\partial g}{\partial y}(u_0).$$

3. *Si en plus, $g(u_0)\neq 0$ alors $\frac{f}{g}$ est différentiable en u_0 et on a*

$$\frac{\partial(f/g)}{\partial x}(u_0)=\frac{1}{g^2(u_0)}\Big[g(u_0)\frac{\partial f}{\partial x}(u_0)-f(u_0)\frac{\partial g}{\partial x}(u_0)\Big],$$

$$\frac{\partial(f/g)}{\partial y}(u_0)=\frac{1}{g^2(u_0)}\Big[g(u_0)\frac{\partial f}{\partial y}(u_0)-f(u_0)\frac{\partial g}{\partial y}(u_0)\Big]$$

Proposition 5.23. *Soit $\phi : I\to\mathbb{R}$ avec I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant $f(u_0)$. Si f est différentiable en u_0 et ϕ est dérivable en $f(u_0)$ alors $\phi\circ f$ est différentiable en u_0 et on a*

$$\frac{\partial(\phi\circ f)}{\partial x}(u_0)=\phi'(f(u_0))\frac{\partial f}{\partial x}(u_0)),$$

$$\frac{\partial(\phi\circ f)}{\partial y}(u_0)=\phi'(f(u_0))\frac{\partial f}{\partial y}(u_0)).$$

Proposition 5.24. *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $t_0\in I$ et soit $x,y : I\to\mathbb{R}$ deux fonctions. Soit $f : \Omega\to\mathbb{R}$ tel que $(x(t_0),y(t_0))\in\Omega$. Si x et y sont dérivables en t_0 et f est différentiable en $(x(t_0),y(t_0))$ alors $F(t)=f(x(t),y(t))$ est dérivable en t_0 et on a*

$$F'(t_0)=x'(t_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x(t_0),y(t_0))+y'(t_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x(t_0),y(t_0)).$$

Le calcul des dérivées partielles se ramène au calcul des dérivées de fonctions d'une seule variables.

Exemple 5.25. *Calculons les dérivées partielles des fonctions suivantes*

$$f(x,y)=e^{x^2y},\ \ g(x,y)=\frac{y}{x+\sin(xy)}.$$

Nous allons donner dans cette section deux interprétations de la différentiabilité, l'une analytique et l'autre géométrique. Soit $f : \Omega\to\mathbb{R}$ une fonction définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$

Théorème 5.26 (Existence du développement limité à l'ordre 1 d'une fonction différentiable)**.** *Si f est différentiable en u_0 alors f admet un développement limité d'ordre 1 en $u_0=(x_0,y_0)$, c'est à dire,*

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+(x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(u_0)+(y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(u_0)+o(\|(x-x_0,y-y_0)\|).$$

Exemple 5.27. *Calculons la limite suivante en utilisant le théorème précédente*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{e^{\sin(xy)}-1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Comme pour une fonction d'une seule variable où la dérivée est la direction de la droite tangente, on a une interprétation analogue pour les fonctions de deux variables.

Proposition 5.28. *Soit $\mathcal{S}_f = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ z = f(x,y)\}$ la surface associé à une fonction f différentiable en $u_0 = (x_0, y_0)$. Alors le plan tangent à $\mathcal{S}_f$ au point $(u_0, f(u_0))$ est le plan d'équation*

$$z = f(u_0) + (x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(u_0) + (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(u_0).$$

Exemple 5.29. *Le plan tangent en $(0,0)$ à la surface $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ z = sin(x+y)\}$ est le plan d'équation*

$$z = x + y.$$

Définition 5.30. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $u_0 \in \Omega$. Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est dite de classe $\mathcal{C}^1$ en u_0 si les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent et sont continues en u_0.*
On note $\mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ en tout point de Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$. $\mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ est stable par l'addition, la multiplication et la passage à l'inverse.

Exemple 5.31. *On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4y^4}{\sqrt{x^2+y^2}} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.

Le théorème fondamental suivant fournit un critère simple de différentiabilité.

Théorème 5.32. *Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ en $u_0 \in \Omega$. Alors f est différentiable en u_0.*

5.5 Fonctions de classe C^2 et lemme de Schwarz

Définition 5.33. *Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent. Si $\frac{\partial f}{\partial x}$ admet des dérivées partielles on pose alors*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \quad et \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

On définit d'une manière anologue $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$. Ces fonctions sont appelées dérivées partielles seconde de f.

Exemple 5.34. *Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes*

1. $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2}{x+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

2. $$g(x,y) = xye^{xy}.$$

Définition 5.35. *On dira que $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ en $u_0 \in \Omega$ si les dérivées partielles seconde existent et continues en u_0. On note $\mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ en tout point de Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$.*

$\mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$ est stable par l'addition, la multiplication et la passage à l'inverse.
On peut maintenant énoncer le Lemme de Schwarz.

Théorème 5.36 (Lemme de Schwarz)**.** *Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ en u_0. Alors*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

La contraposée du Lemme de Schwarz peut être utlisée pour montrer que certaines fonctions ne sont pas de classe $\mathcal{C}^2$ comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 5.37. *La fonction suivante est-elle de classe $\mathcal{C}^2$?*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $u_0 \in \Omega$. Une application $g : \Omega \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (g_1(x,y), g_2(x,y))$ une application différentiable (resp. de classe $\mathcal{C}^1$) en u_0.
On note par $\mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^2)$ l'ensemble des fonctions de classe C^1 en tout point de Ω à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.

Définition 5.38. *Soit $g : \Omega \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (g_1(x,y), g_2(x,y))$ une application différentiable en $(x_0, y_0) \in \Omega$.*

1. *La matrice Jacobienne de g en (x_0,y_0) est la matrice carrée*

$$J(g,(x_0,y_0)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial g_1}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial g_2}{\partial y}(x_0,y_0) \end{pmatrix}.$$

2. *Le Jacobien de g en (x_0,y_0) est le déterminant*

$$\mathcal{J}(g,(x_0,y_0)) = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial g_1}{\partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial g_2}{\partial y}(x_0,y_0) \end{vmatrix}.$$

Exemple 5.39. *On considère l'application $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $u(x,y) = (e^{xy}, \sin(x+y))$. Cette application est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et on a*

$$J(u,(0,\pi)) = \begin{pmatrix} \pi & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{J}(u,(0,\pi)) = -\pi.$$

Proposition 5.40. *Soit $g = (u,v) : \Omega_1 \to \mathbb{R}^2$ et $f : \Omega_2 \to \mathbb{R}^2$ avec $g(\Omega_1) \subset \Omega_2$. Si g est différentiable en $u_0 = (x_0,y_0)$ et f différentiable en $(u(x_0,y_0), v(x_0,y_0))$ alors $F(x,y) = f(u(x,y), v(x,y))$ est différentiable en (x_0,y_0) et on a*

$$\frac{\partial F}{\partial x}(u_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(u_0)\frac{\partial f}{\partial u}(u(x_0,y_0), v(x_0,y_0))) + \frac{\partial v}{\partial x}(u_0)\frac{\partial f}{\partial v}(u(x_0,y_0), v(x_0,y_0))),$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(u_0) = \frac{\partial u}{\partial y}(u_0)\frac{\partial f}{\partial u}(u(x_0,y_0), v(x_0,y_0))) + \frac{\partial v}{\partial y}(u_0)\frac{\partial f}{\partial v}(u(x_0,y_0), v(x_0,y_0))).$$

Remarque 5.41. *Ces formules peuvent sécrire à la manière des physiciens*

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial v} \quad et \quad \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial v},$$

ou encore matriciellement

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial y} \end{pmatrix} = \mathcal{J}(u,(0,\pi)) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} \\ \frac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix},$$

où la matrice carrée est la transposée de la matrice Jacobienne.

Exemple 5.42 (Passage en cordonnées polaires). *Soit $\alpha > 0$ et $f : \mathcal{B}((0,0),\alpha) \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Pour tout $(r,\theta) \in]-\alpha,\alpha[\times\mathbb{R}$, posons*

$$F(r,\theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)).$$

Alors F est différentiable sur $]-\alpha,\alpha[\times\mathbb{R}$ et, pour tout $(r,\theta) \in]-\alpha,\alpha[\times\mathbb{R}$ on a

$$\frac{\partial F}{\partial r} = \cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + \sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)),$$

$$\frac{\partial F}{\partial \theta} = -r\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) + r\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)).$$

$\boxed{5.6}$ Intégrales doubles d'une fonction continue sur un domaine simple

Théorème 5.43 (Théorème de Fubini). *Soit f une fonction continue sur une partie $D \subset \mathbb{R}^2$. On suppose qu'il existe $a < b$, $c < d$, u_1, u_2 deux fonctions continues sur $[a,b]$ et deux fonctions v_1, v_2 continues sur $[c,d]$ tel que*

$$\begin{aligned} D &= \{(x,y)/\ x \in [a,b],\ u_1(x) \leqslant y \leqslant u_2(x)\} \\ &= \{(x,y)/\ y \in [c,d],\ v_1(y) \leqslant x \leqslant v_2(y)\}. \end{aligned}$$

Alors

$$\int_a^b (\int_{u_1(x)}^{u_2(x)} f(x,y)dy)dx = \int_c^d (\int_{v_1(y)}^{v_2(y)} f(x,y)dx)dy.$$

Une partie $D \subset \mathbb{R}^2$ est dite x-simple (resp. y-simple) si $D = \{(x,y)/\ x \in [a,b],\ u_1(x) \leqslant y \leqslant u_2(x)\}$ avec u_1 et u_2 continues sur $[a,b]$ (resp. $D = \{(x,y)/\ y \in [c,d],\ v_1(y) \leqslant x \leqslant v_2(y)\}$ avec v_1 et v_2 continues sur $[c,d]$).

Une partie est dite simple si elle soit x-simple soit y-simple.

Exemple 5.44.

1. *Toute rectangle $[a,b]\times[c,d]$ est à la fois x-simple et y-simple et le théorème de Fubini affirme que, pour toute fonction continue sur $[a,b]\times[c,d]$,*

$$\int_a^b (\int_c^d f(x,y)dy)dx = \int_c^d (\int_a^b f(x,y)dx)dy.$$

2. *Soit $D = \{(x,y)/\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x+y \leqslant 1\}$. Ce domaine simple car*

$$\begin{aligned} D &= \{(x,y)/\ x \in [0,1],\ 0 \leqslant y \leqslant 1-x\} \\ &= \{(x,y)/\ y \in [0,1],\ 0 \leqslant x \leqslant 1-y\} \end{aligned}$$

Il est alors légitime de poser la définition suivante.

Définition 5.45.

1. *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un domaine x-simple*

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / a \leqslant x \leqslant b,\ \ u_1(x) \leqslant y \leqslant u_2(x)\}.$$

L'intégrale de f sur D est la quantité

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int_a^b (\int_{u_1(x)}^{u_2(x)} f(x,y)dy)dx.$$

2. *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un domaine x-simple*

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / c \leqslant y \leqslant d,\ v_1(y) \leqslant x \leqslant v_2(y)\}.$$

L'intégrale de f sur D est la quantité

$$\int\int_D f(x, y)dxdy = \int_c^d \left(\int_{v_1(y)}^{v_2(y)} f(x, y)dx\right)dy.$$

3. *L'aire d'une domaine simple D est la quatité*

$$\mathcal{A}(D) = \int\int_D dxdy.$$

Exemple 5.46. *Claculer les intégrales suivants*

1. $I = \int\int_{[0,1]\times[1,2]}(x^2 + xy + y^2)$.
2. $J = \int\int_D (x - y)dxdy$ *avec* $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leqslant x \leqslant 1,\ x^2 \leqslant y \leqslant x^2 + 1\}$.
3. *Claculer K l'air de* $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \geqslant 0,\ x \geqslant 0\, x + y \leqslant 1\}$.

Ind. $I = \frac{41}{12}$, $J = \frac{1}{2}$ et $K = \frac{1}{2}$.

Proposition 5.47. 1. *Si D_1 et D_2 sont deux domaines simples et disjoints et f continue sur $D_1 \cup D_2$ alors*

$$\int\int_{D_1\cup D_2} f(x, y)dxdy = \int\int_{D_1} f(x, y)dxdy + \int\int_{D_2} f(x, y)dxdy.$$

2. *Si f est continue sur D et $f \geqslant 0$ alors*

$$\int\int_D f(x, y)dxdy \geqslant 0.$$

3. *Si f et g sont continues sur D et si $f \geqslant g$ alors*

$$\int\int_D f(x, y)dxdy \geqslant \int\int_D g(x, y)dxdy.$$

4. *Si f et g sont continues sur D et si $a, b \in \mathbb{R}$ alors*

$$\int\int_D (af + bg)(x, y)dxdy = a\int\int_D f(x, y)dxdy + b\int\int_D g(x, y)dxdy.$$

5. *Pour tout fonction f continue sur D, on a*

$$\left|\int\int_D f(x, y)dxdy\right| \geqslant \int\int_D |f(x, y)|dxdy.$$

5.7 Formule de chagement de variables

Théorème 5.48. *Soit $\phi : \Omega_1 \to \Omega_2$, $(u, v) \mapsto (x, y)$ un changement de variable entre deux ouverts de $\mathbb{R}^2$ et soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un domaine simple contenu dans Ω_2. Alors*

$$\int\int_D f(x, y)dxdy = \int\int_{\phi^{-1}(D)} f \circ \phi(u, v)|\mathcal{J}(\phi, (u, v))|dudv,$$

où $\mathcal{J}(\phi, (u, v))$ est le Jacobien donné par

$$\mathcal{J}(\phi, (u, v)) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Remarque 5.49. *La formule de changement de variables s'écrit dans le cas des coordonnées polaires* $(x, y) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$,

$$\int\int_D f(x,y)dxdy = \int\int_\Delta f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))rdrd\theta,$$

où $\Delta = \{(r,\theta)/(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \in D\}$.

Exemple 5.50. *Calculer l'intégrale* $\int\int_D e^{-x^2-y^2}dxdy$ *où* D *est le disque fermé de centre* $(0,0)$ *et le rayon* R. *Le passage en coordonnées polaires donne*

$$\begin{aligned}\int\int_D e^{-x^2-y^2}dxdy &= \int\int_{[0,R]\times[0,2\pi]} e^{-r^2}rdrd\theta \\ &= \int_0^{2\pi}(\int_0^R re^{-r^2-y^2}dr)d\theta \\ &= 2\pi[-\frac{1}{2}e^{-r^2}]_0^R \\ &= \pi(1-e^{-R^2}).\end{aligned}$$

$\boxed{5.8}$ Exercices

Exercice 18. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Montrer que $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ n'existe pas.

Exercice 19. Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.
3. Montrer que f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Exercice 20. Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Montrer que f est de classe C^1.
2. Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$.
3. Que peut-on conclure ?

Exercice 21. Calculer l'aire du domaine compris entre les courbes :

1. $y = x^2 + 9, y = x^2 - 9, x = -1, x = 1$.
2. $x = y^2 - 4, x = 4 - y^2$.
3. $y = x + 2, y = 4 - x, y = 0$.

Exercice 22. Calculer les intégrales doubles suivantes :

1. $\int\int_D e^x \frac{\sin y}{y} dxdy,\ D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \ln y \leqslant x \leqslant \ln(2y),\ \frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \pi\}$.
2. $\int\int_D 2xydxdy$, D est le domaine compris entre les courbes $y = x^2$ et $x = y^2$.
3. $\int\int_D (x-y)dxdy$ où D est la partie du plan délimitée par les droites $x = 0, y = x+2$ et $y = -x$.
4. $\int\int_D (4 - x^2 - y^2)dxdy$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 0 \leqslant x, 0 \leqslant y, x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.
5. $\int\int_D (x^2 + y)dxdy$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4\}$.
6. $\int\int_D dxdy$ où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (x-1)^2 + (y-2)^2 \leqslant 4\}$.

Exercice 23. En effectuant le changement de variables $(x,y) = (u^2v, uv^2)$, calculer $\int\int_D e^{\frac{x^3+y^3}{xy}} dxdy$ où

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y^2 - 8x \leqslant 0,\ x^2 - 8y \leqslant 0\}.$$

CHAPITRE 6

Examens

Université Cadi Ayyad
Faculté Poly-disciplinaire -Safi- A.U : 2016-2017

Examen d'Analyse 2 (SMP-SMC) S2
(Durée 2h)

Exercice 1 :
1) Vérifier que $\frac{3x}{x^3-1} = \frac{1}{x-1} + \frac{-x+1}{x^2+x+1}$.

2) Calculer $\int \frac{3x}{x^3-1} dx$.

3) Résoudre sur $]1, +\infty[$ l'équation différentielle suivante :

$$(\text{E}) : z' - \frac{2}{x} z = \frac{3x^3}{x^3-1}.$$

Exercice 2 :
Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{1+x^2}.$$

Exercice 3 :

Soient a un nombre réel strictement positif et $I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\log(x)}{x^2+a^2} dx$.

1) Montrer que l'intégrale $I(a)$ est convergente.

2) En utilisant le changement de variable : $x = \frac{a}{t}$, calculer $I(a)$ en fonction de $I(1)$.

3) En déduire que $I(a) = \frac{\pi}{2a} \log(a)$.

Exercice 4 :
Donner la nature des séries de terme général u_n et v_n suivantes :

1) $u_n = (1 + \frac{a}{n})^{-n^2}$, $a \in \mathbb{R}$,

2) $v_n = (\frac{n^2}{n^2+1})^{n^2}$.

Université Cadi Ayyad
Faculté Poly-disciplinaire -Safi- A.U : 2016-2017

Rattrapage d'Analyse 2 (SMP-SMC) S2
(Durée 1h30)

Exercice 1 :
On pose $f(x) = \dfrac{x\ln(x)}{(1+x^2)^2}$, $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx$ et $J = \displaystyle\int_0^1 f(t)dt$.

1) Calculer $\displaystyle\int \frac{1}{x(1+x^2)}dx$ (Utiliser : $\dfrac{1}{x(1+x^2)} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{x}{1+x^2}$).

2) Montrer que $\displaystyle\int f(x)dx = -\frac{\ln(x)}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{x(1+x^2)}dx$.

3) En déduire que l'intégrale I est convergente.

4) En utilisant le changement de variable $x = \dfrac{1}{t}$, montrer que $I = -J$.

5) Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle suivante :
$$(E) : y' = \frac{2x+1}{x^2+x+1}y + (x^2+x+1)f(x).$$

Exercice 2 :
Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'' - 5y' + 4y = 3e^{4x} + 34\cos(x).$$

Exercice 3 :
Donner la nature et calculer la somme de la série de terme général :

$$u_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

Université Cadi Ayyad

Faculté Poly-disciplinaire -Safi- A.U : 2017-2018

Examen d'Analyse 2 (SMP-SMC) S2

(Durée 1h30)

NB : Aucun document n'est autorisé. Les calculs faits doivent être justifiés, il sera tenu compte de la qualité de la rédaction.

Questions indépendantes : (8pts)

1. Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a. Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

b. Montrer que f n'est pas continue au point $(0,0)$.

2. Calculer les intégrales doubles $\int\int_D dxdy$ et $\int\int_D x^2 dxdy$ avec

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ (x-1)^2 + (y-2)^2 \leqslant 4\}.$$

3. Donner la nature de la série de terme générale $u_n = \frac{n}{(n+1)e^n}$.

Problème : (12 pts)

Soient f, g et h trois fonctions numériques de la variable réelle x définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x, \qquad g(x) = 1 + e^{-x}, \qquad h(x) = f(x).g(x).$$

1. **a.** Résoudre l'équation différentielle suivante sur $]0, +\infty[$:

$$xy' + (x-1)y = x^2 \qquad (1).$$

b. Déterminer la solution y_p qui vérifie $y(1) = \dfrac{e+1}{e}$.

c. Comparer $h(x)$ et y_p.

Posons $J(x) = e^{f(-x)} \log((g(-x))$.

2. **a.** Calculer $\displaystyle\int \frac{dx}{g(x)}$ et $\displaystyle\int \frac{dx}{g(-x)}$.

b. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} J(x)dx$.

3. **a.** Donner la solution générale, notée y_G, de l'équation différentielle :

$$y' + y = \frac{1}{1+e^x} \qquad (2).$$

b. Comparer $J(x)$ et y_G.

c. Montrer que toute solution de (2) est solution de

$$y'' + 2y' + y = \frac{1}{(1+e^x)^2} \qquad (3).$$

Université Cadi Ayyad
Faculté Poly-disciplinaire -Safi- A.U : 2017-2018

Rattrapage d'Analyse 2 (SMP-SMC) S2
(Durée 1h30)

NB : Aucun document n'est autorisé. Les calculs faits doivent être justifés, il sera tenu compte de la qualité de la rédaction.

Exercice 1 : (5 pts)

1. Vérifier que $\dfrac{1}{x(x^2-1)} = -\dfrac{1}{x} + \dfrac{\frac{1}{2}}{x-1} + \dfrac{\frac{1}{2}}{x+1}$.
2. Calculer $\displaystyle\int \frac{1}{x(x^2-1)}dx$.
3. Montrer que $\displaystyle\int \frac{2x\ln(x)}{(x^2-1)^2}dx = -\frac{\ln(x)}{x^2-1} + \int \frac{1}{x(x^2-1)}dx$.
4. En déduire que $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{2x\ln(x)}{(x^2-1)^2}dx$ est convergente.

Exercice 2 : (5 pts)

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$(E) \qquad\qquad y'' + 2y' + y = e^{-x} + \sin x.$$

Exercice 3 : (4 pts)

Soit $u_n = \dfrac{2}{(2n+1)(2n+3)}$, où $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que la série $\sum u_n$ est convergente.
2. **a.** Montrer que $u_n = a_n - a_{n+1}$, avec $a_n = \dfrac{1}{2n+1}$.

   b. En déduire la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Exercice 4 : (6 pts)

On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.
3. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ pour $(x,y) \neq (0,0)$.
4. f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$? justifiez.