Chapitre 3:
Equations différentielles

Module: Analyse 2

SMP-SMC

20 mars 2020

Sommaire

Sommaire

Soit $F(x, z_0, z_1, ..., z_n)$ une fonction de $(n+2)$ variables réelles définie sur une partie A de $\mathbb{R}^{n+2}$. Une équation différentielles est une équation qui s'écrit sous la forme :

$$(E): \ \ F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$$

où l'inconnue y est une fonction de la variable réelle x.
L'entier n est dit ordre de l'équation différentielle.

Résoudre l'équation différentielle (E), c'est déterminer sa solution générale c-à-d toutes les fonctions g définies et dérivables jusqu'a l'ordre n sur un intervalle J de $\mathbb{R}$ telles que :

$$x \in J \Longrightarrow (x, g(x), g'(x), ..., g^{(n)}(x)) \in A$$

et

$$F(x, g(x), g'(x), ..., g^{(n)}(x)) = 0$$

Exemples

1. La quantité de carbone notée $N(t)$ dans un échantillon animal ou végétal décroit après la mort de celui-ci. Elle vérifié l'équation différentielle
$$\frac{dN}{dt} = -\lambda.N$$
2. Considérons la chute d'un corps de masse m soumis à frottement fluide, proportionel à la vitesse. Le vecteur position $x(t)$ est solution de l'équation différentielle
$$mx'' + \gamma x' - mgx = 0.$$
3. Considérons un circuit RLC en série. L'intensité i qui traverse le circuit obéit à l'équation différentielle :
$$L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = 0.$$

Sommaire

Une équation différentielle est du premier ordre si elle ne fait intervenir que la première dérivée y'.

Définition : Equation différentielle linéaire du premier ordre

Une équation différentielle linéaire du premier ordre est une équation du type :

$$y' = a(x)y + b(x) \quad (E)$$

où a et b sont des fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et continues sur I.

L'équation $y' - a(x)y = 0$ est l'équation sans second membre (E.S.S.M) associée à (E).

Théorème

Soit A une primitive de a sur l'intervalle I. La solution générale de l' ESSM : $y' - a(x)y = 0$ définie sur I est $y = K\, e^{A(x)}$ où $K \in \mathbb{R}$

Théorème

Soit y_0 une solution particulière de (E) définie sur I. Les solutions de (E) sont exactement les fonctions $y_0 + y$ où y est une solution de l'ESSM. C-à-d :

$$y_{(E)} = y_0 + y$$

Donc $y_{(E)} = y_0 + Ke^{A(x)}$, $K \in \mathbb{R}$

Solution particulière par variation de la constante.

$y = Ke^{A(x)}$ est la solution générale de L'ESSM, on cherche une solution particulière de (E) sous la forme $y_0 = K(x)e^{A(x)}$.

y_0 est une solution de (E) ssi $y_0' - a(x)y_0 = b(x)$

ssi $K'(x)e^{A(x)} + K(x)A'(x)e^{A(x)} - a(x)K(x)e^{A(x)} = b(x)$

ssi $K'(x)e^{A(x)} + K(x)a(x)e^{A(x)} - a(x)K(x)e^{A(x)} = b(x)$

ssi $K'(x)e^{A(x)} = b(x)$ ssi $K'(x) = \dfrac{b(x)}{e^{A(x)}}$

On en déduit $K(x)$ en intégrant $K(x) = \displaystyle\int \frac{b(x)}{e^{A(x)}}dx$

d'où

$$y_0 = e^{A(x)} \int \frac{b(x)}{e^{A(x)}}dx$$

Exemple

Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle

$$xy' = 2y + x^3 e^x \quad (E)$$

Sur $]0,+\infty[$ $(E) \Longleftrightarrow y' = \frac{2y}{x} + x^2 e^x$

$\longrightarrow$ ESSM :

$y' = \frac{2y}{x} \Longrightarrow y = K\exp(\int \frac{2}{x}dx) = K\exp(2\log x) = K\exp(\log x^2) = Kx^2$

Donc $y = Kx^2$.

$\longrightarrow$ On cherche une solution particulière sous la forme $y_p = K(x)x^2$

$$y_p' = K'(x)x^2 + 2xK(x)$$

$$y_p' = \frac{2y}{x} + x^2 e^x \Longleftrightarrow K'(x)x^2 + 2xK(x) = 2K(x)x + x^2 e^x$$

$$\Longleftrightarrow K'(x)x^2 = x^2 e^x \Longleftrightarrow K'(x) = e^x \Longleftrightarrow K(x) = e^x$$

Donc $y_p = x^2 e^x$. La solution générale de (E) est $y = Kx^2 + x^2 e^x$, $K \in \mathbb{R}$

Exemple

Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle

$$xy' = 2y + x^3e^x \ \ (E)$$

Sur $]0,+\infty[$ $(E) \iff y' = \dfrac{2y}{x} + x^2e^x$

$\longrightarrow$ ESSM :

$$y' = \frac{2y}{x} \Longrightarrow y = K\exp(\int \frac{2}{x}dx) = K\exp(2\log x) = K\exp(\log x^2) = Kx^2$$

Donc $y = Kx^2$.

$\longrightarrow$ On cherche une solution particulière sous la forme $y_p = K(x)x^2$

$$y_p' = K'(x)x^2 + 2xK(x)$$

$$y_p' = \frac{2y}{x} + x^2e^x \iff K'(x)x^2 + 2xK(x) = 2K(x)x + x^2e^x$$

$$\iff K'(x)x^2 = x^2e^x \iff K'(x) = e^x \iff K(x) = e^x$$

Donc $y_p = x^2e^x$. La solution générale de (E) est $y = Kx^2 + x^2e^x$, $K \in \mathbb{R}$

Proposition :(Superposition des solutions)

Soit l'équation

$$y' = a(x)y + b(x) \quad (E)$$

avec $b(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k(x)$. Soient

$$y' = a(x)y + b_k(x) \quad (E_k)$$

si y_k est une solution particulière de (E_k) alors $y = \sum_{k=1}^{n} y_k$ est une solution particulière de (E).

Sommaire

Equations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

Une équation différentielle linéaire du second ordre, à coefficients constants, est une équation de la forme :

$$ay'' + by' + cy = g(x) \quad (E)$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ et g est une fonction continue sur un intervalle I.
L'équation différentielle :

$$ay'' + by' + cy = 0 \quad (E_0)$$

est appelée l'équation sans second membre associée à (E).
$\longrightarrow$ L'équation $ar^2 + br + c = 0$ est appelé l'équation caractéristique de (E_0).
Soit $\Delta = b^2 - 4ac$, le discriminant de l'équation caractéristique associée à (E_0).

Résolution de L'ESSM.

Théorème

Soit l' ESSM suivante $ay'' + by' + cy = 0 \quad (E_0)$.

$\longrightarrow$Si $\Delta > 0$, l'équation caractéristique possède deux racines réelles distinctes $r_1 \neq r_2$ et les solutions de (E_0) sont les

$$y(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x} \quad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$\longrightarrow$ Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique possède une racine double r_0 et les solutions de (E_0) sont les

$$y(x) = (\lambda + \mu x) e^{r_0 x} \quad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$\longrightarrow$ Si $\Delta < 0$, l'équation caractéristique possède deux racines complexes $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$ et les solutions de (E_0) sont $y(x) = e^{\alpha x}\left(\lambda \cos(\beta x) + \mu \sin(\beta x)\right) \quad$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Exemples

1) Résoudre $y'' - y' - 2y = 0$. L'équation caractéristique est $r^2 - r - 2 = 0$, $\Delta > 0$, $r_1 = -1$, $r_2 = 2$. D'où $y(x) = \lambda e^{-x} + \mu e^{2x}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

2) Résoudre $y'' - 4y' + 4y = 0$. L'équation caractéristique est $r^2 - 4r + 4 = 0$, $\Delta = 0$, $r_0 = 2$. D'où $y(x) = (\lambda x + \mu)e^{2x}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

3) Résoudre $y'' - 2y' + 5y = 0$. L'équation caractéristique est $r^2 - 2r + 5 = 0$, $\Delta < 0$, $r_1 = 1 + 2i$, $r_2 = 1 - 2i$. D'où $y(x) = e^x(\lambda \cos(2x) + \mu \sin(2x))$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Résolution de L'équation complète (E)

$$(E) \quad : ay'' + by' + cy = f(x)$$

Proposition

Pour tout $x_0 \in I$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, l'équation (E) admet une solution unique y telle que $y(x_0) = \alpha$ et $y'(x_0) = \beta$.

Remarque : (Principe de superposition des solutions)

Si $f(x)$ est somme de plusieurs fonctions $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x)$. On cherche une solution particulière z_i de chaque équation $ay'' + by' + cy = f_i(x)$, et la fonction $z = z_1 + z_2 + ... + z_n$ est une solution particulière de (E).

Exemple :
Une solution particulière de l'équation différentielle

$$y'' + 4y' + 4y = x + e^{-2x} \quad (E)$$

est la fonction $y_p = y_{1p} + y_{2p}$ avec y_{1p} et y_{2p} sont des solutions particulières d équations :

$$y'' + 4y' + 4y = x \quad (E_1)$$

$$y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \quad (E_2)$$

Théorème

Soit y_1 une solution particulière de (E) définie sur I. Les solutions de (E) sont exactement les fonctions $y_1 + y$ où y est une solution de l'ESSM. C-à-d

$$y_{(E)} = y_1 + y_{(ESSM)}$$

La résolution de (E) se ramène donc à la détermination d'une solution particulière de (E).

$\longrightarrow$ **Cas général** : S'il n'y a pas de solution particulière évidente, on fait la méthode de la variation de la constante :

(Méthode de variation de la constante : Méthode de Lagrange)

On cherche une solution particulière sous la forme $y = A(x)y_1 + B(x)y_2$ avec la condition de Lagrange

$$A'(x)y_1 + B'(x)y_2 = 0$$

où y_1 et y_2 sont donnés par :

$$\begin{cases} y_1 = e^{r_1 x} \text{ et } y_2 = e^{r_2 x} \text{ si } \Delta > 0\,; \\ y_1 = xe^{rx} \text{ et } y_2 = e^{rx} \text{ si } \Delta = 0\,; \\ y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x \text{ et } y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x \text{ si } \Delta < 0. \end{cases}$$

$A'(x)$ et $B'(x)$ vérifiant le système
$\begin{cases} A'(x)y_1 + B'(x)y_2 = 0\,; \\ A'(x)y_1' + B'(x)y_2' = \frac{1}{a}f(x). \end{cases}$ on trouve A' et B' et par intégration on trouve A et B.

Exemple

Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^{2x}} \quad (E)$$

L' ESSM : $y'' + 3y' + 2y = 0$.
L'équation caractéristique : $r^2 + 3r + 2 = 0 \iff r = -1$ et $r = -2$. La solution générale de l'ESSM est

$$y = Ae^{-x} + Be^{-2x}, \text{ avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2$$

On cherche une solution particulière de (E) sous la forme $y = A(x)e^{-x} + B(x)e^{-2x}$ avec la condition de Lagrange $A'(x)e^{-x} + B'(x)e^{-2x} = 0$ et $A'(x)$ et $B'(x)$ vérifient le système :

$$\begin{cases} A'(x)e^{-x} + B'(x)e^{-2x} = 0 \ (1)\,; \\ -A'(x)e^{-x} - 2B'(x)e^{-2x} = \dfrac{1}{1+e^{2x}} \ (2). \end{cases}$$

$(1)+(2) \Longrightarrow -B'(x)e^{-2x} = \dfrac{1}{1+e^{2x}} \Longrightarrow B'(x) = -\dfrac{e^{2x}}{1+e^{2x}}.$

Donc $B(x) = -\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}dx = -\frac{1}{2}\log(1+e^{2x})$

$2\times(1)+(2)$ implique $A'(x)e^{-x} = \dfrac{1}{1+e^{2x}} \Longrightarrow A'(x) = \dfrac{e^{x}}{1+e^{2x}}$

Posons $t = e^x$, $dt = e^x dx$. Donc

$A(x) = \displaystyle\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx = \int \frac{dt}{1+t^2} = \arctan(t) = \arctan(e^x)$

Une solution particulière est

$$y_p = \arctan(e^x)e^{-x} - \frac{1}{2}\log(1+e^{2x})e^{-2x}$$

La solution générale de (E) est

$$y = Ae^{-x} + Be^{-2x} + \arctan(e^x)e^{-x} - \frac{1}{2}\log(1+e^{2x})e^{-2x}$$

Cas particuliers

1) Cas où $f(x) = e^{\lambda x} P(x)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P(x)$ un polynôme.

On cherche une solution particulière sous la forme :

- $y = e^{\lambda x} Q(x)$, si λ n'est pas racine de $ar^2 + br + c = 0$
- $y = x e^{\lambda x} Q(x)$, si λ est une racine simple de $ar^2 + br + c = 0$
- $y = x^2 e^{\lambda x} Q(x)$, si λ est une racine double de $ar^2 + br + c = 0$

avec $Q(x)$ un polynôme tel que $d^\circ Q = d^\circ P$.

2) Cas où $f(x) = P(x)$, où P est un polynôme.

On applique le cas précédent avec $\lambda = 0$

- $y = Q(x)$, si 0 n'est pas racine de $ar^2 + br + c = 0$
- $y = xQ(x)$, si 0 est une racine simple de $ar^2 + br + c = 0$
- $y = x^2Q(x)$, si 0 est une racine double de $ar^2 + br + c = 0$

où $Q(x)$ un polynôme tel que $d^\circ Q = d^\circ P$.

3) Cas où $f(x) = e^{\alpha x} P(x) \cos \beta x$ ou bien $f(x) = e^{\alpha x} P(x) \sin \beta x$ avec $P(x)$ un polynôme, $\alpha \in \mathbb{R}$,$\beta \in \mathbb{R}^*$

On cherche une solution particulière sous la forme :

- $y = e^{\alpha x}(P_1(x) \cos \beta x + P_2(x) \sin \beta x)$, si $\alpha + i\beta$ n'est pas racine de $ar^2 + br + c = 0$
- $y = e^{\alpha x}(xP_1(x) \cos \beta x + xP_2(x) \sin \beta x)$, si $\alpha + i\beta$ est une racine de $ar^2 + br + c = 0$

avec $P_1(x)$ et $P_2(x)$ sont deux polynôme tels que $d^\circ P = d^\circ P_1 = d^\circ P_2$.

Exemples

1) Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + 4y' + 4y = x + e^{-2x} \quad (E)$$

$\longrightarrow$ ESSM : $y'' + 4y' + 4y = 0$ l'équation caractéristique :
$r^2 + 4r + 4 = 0 \iff (r+2)^2 = 0 \ (*) \ r = -2$
La solution générale de L'ESSM est $y = (Ax + B)e^{-2x}$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.
$\longrightarrow$ Soient les équations :

$$y'' + 4y' + 4y = x \quad (E_1)$$
$$y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \quad (E_2)$$

$\rightarrow$ Puisque 0 n'est pas racine de (*), on cherche une solution particulière de (E_1) sous la forme $y_1 = ax + b$
On a : $y_1' = a$ et $y_1'' = 0$

$\iff a = \frac{1}{4}$ et $b = \frac{-1}{4}$ donc $y_1 = \frac{x-1}{4}$.

$\rightarrow$ Puisque -2 est une solution double de l'équation caractéristique, on chereche une solution particulière de (E_2) sous la forme $y_2 = \alpha x^2 e^{-2x}$
$y_2' = 2\alpha x e^{-2x} - 2\alpha x^2 e^{-2x}$,
$y_2'' = 2\alpha e^{-2x} - 4\alpha x e^{-2x} - 4\alpha x e^{-2x} + 4\alpha x^2 e^{-2x}$.
$y_2'' + 4y_2' + 4y_2 = e^{-2x} \iff$
$e^{-2x}(2\alpha - 8\alpha x + 4\alpha x^2 + 8\alpha x - 8\alpha x^2 + 4\alpha x^2) = e^{-2x}$
$\iff 2\alpha e^{-2x} = e^{-2x} \iff 2\alpha = 1 \iff \alpha = \dfrac{1}{2}$
$y_2 = \dfrac{x^2}{2} e^{-2x}$.
Donc une solution particulière de (E) est $y_p = y_1 + y_2 = \frac{x-1}{4} + \frac{x^2}{2} e^{-2x}$.
La solution générale de (E) est alors

$$y = (Ax + B)e^{-2x} + \frac{x-1}{4} + \frac{x^2}{2} e^{-2x}$$

avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$