Chapitre 2:
Intégrales Généralisées

P: ESS

Faculté polydisciplinaire-Safi-
Module: Analyse 2
SMP-SMC

3 mars 2020

Sommaire

Sommaire

Introduction

$\rightarrow$ Dans le chapitre précédent, on a défini et étudié la notion d'intégrale de Riemann d'une fonction bornée et définie sur un intervalle fermé et borné.

$\rightarrow$ Dans ce chapitre, on cherche à étendre la notion d'intégrale aux fonctions non nécessairement bornée et définies sur des intervalles de la forme $[a, b[$; $[a, +\infty[$, $]a, b]$, $]-\infty, b]$, $]a, b[$, $]-\infty, +\infty[$.

Définition :

Soit f une fonction continue sur $[a, b[$ où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$. Pour $x \in [a, b[$, on pose $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. On dit que l'intégrale de f sur $[a, b[$ est convergente ou existe si $\lim_{x \to b} F(x)$ existe et elle est finie.

Cette limite est appelée intégrale généralisée ou impropre de f sur $[a, b[$, et on la note par $\int_a^b f(t)dt$.

$\longrightarrow$ Si $\lim_{x \to b} F(x)$ n'existe pas ou égale à ∞, on dit que l'intégrale de f sur $[a, b[$ n'existe pas ou divergente.

Définition :

Soit f une fonction continue sur $]a, b]$ où $b \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ ou $a = -\infty$. Pour $x \in]a, b]$, on pose $F(x) = \displaystyle\int_x^b f(t)dt$. On dit que l'intégrale de f sur $]a, b]$ est convergente ou existe si $\lim\limits_{x \to a} F(x)$ existe et elle est finie.

Cette limite est appelée intégrale généralisée ou impropre de f sur $]a, b]$, et on la note par $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$.

$\longrightarrow$ Si $\lim\limits_{x \to a} F(x)$ n'existe pas ou égale à ∞, on dit que l'intégrale de f sur $]a, b]$ n'existe pas ou divergente.

Exemples

1) Etudier la convergence de $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$.

Pour $x \geq 0$ on a :

$$\int_0^x e^{-t} dt = [-e^{-t}]_0^x = -e^{-x} + 1$$

$\lim_{x \to +\infty} \int_0^x e^{-t} dt = \lim_{x \to +\infty} 1 - e^{-x} = 1$. Donc $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt$ est convergente et on a :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$$

2) Etudier la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}}$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$

Pour $x \geq 1$ on a : $\displaystyle\int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t}} = [2\sqrt{t}]_1^x = 2\sqrt{x} - 2 \to +\infty$, qd $x \to +\infty$.

Donc

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}} \text{ diverge.}$$

Pour $\varepsilon > 0$: $\displaystyle\int_\varepsilon^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = [2\sqrt{t}]_\varepsilon^1 = 2 - 2\sqrt{\varepsilon} \to 2$, qd $\varepsilon \to 0$. Donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ est converge et on a

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2$$

.

Définition

Soit f une fonction continue sur $]a,b[$ $(-\infty \leq a \leq b \leq +\infty)$. On dit que l'intégrale de f sur $]a,b[$ est convergente s'il existe $c \in]a,b[$ tel que chacune des intégrales de f sur $]a,c]$ et sur $[c,b[$ sont convergentes, et on pose

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$$

Le nombre $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est indépendant de c, et s'appelle l'intégrale généralisée de f sur $]a,b[$.

Exemples

1) Etudier la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt$

Pour $x > 0$: $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = [\arctan t]_0^x = \arctan x \to \frac{\pi}{2}$, qd $x \to +\infty$.

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}$

Pour $x < 0$: $\displaystyle\int_x^0 \frac{1}{1+t^2}\,dt = [\arctan t]_x^0 = -\arctan x \to \frac{\pi}{2}$, qd $x \to -\infty$.

Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}$

D'où $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+t^2}\,dt + \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$

2) Etudier la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(t)\,dt$ Pour $x > 0$:

$\displaystyle\int_0^x \sin(t)\,dt = -[\cos(t)]_0^x = -\cos(x) + 1$ n'a pas de limite qd $x \to +\infty$, donc $\displaystyle\int_0^x \sin(t)\,dt$ diverge et par suite $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(t)\,dt$ diverge.

Exemples

1) Etudier la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt$

Pour $x > 0$: $\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = [\arctan t]_0^x = \arctan x \to \frac{\pi}{2}$, qd $x \to +\infty$.

Donc $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2}$

Pour $x < 0$: $\int_x^0 \frac{1}{1+t^2} dt = [\arctan t]_x^0 = -\arctan x \to \frac{\pi}{2}$, qd $x \to -\infty$.

Donc $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2}$

D'où $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+t^2} dt + \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$

2) Etudier la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(t) dt$ Pour $x > 0$:

$\int_0^x \sin(t) dt = -[\cos(t)]_0^x = -\cos(x) + 1$ n'a pas de limite qd $x \to +\infty$, donc $\int_0^x \sin(t) dt$ diverge et par suite $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(t) dt$ diverge.

Exemples

1) Etudier la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt$

Pour $x > 0$: $\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = [\arctan t]_0^x = \arctan x \to \frac{\pi}{2}$, qd $x \to +\infty$.

Donc $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{2}$

Pour $x < 0$: $\int_x^0 \frac{1}{1+t^2}dt = [\arctan t]_x^0 = -\arctan x \to \frac{\pi}{2}$, qd $x \to -\infty$.

Donc $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{2}$

D'où $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+t^2}dt + \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$

2) Etudier la convergence de $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(t)dt$ Pour $x > 0$:

$\int_0^x \sin(t)dt = -[\cos(t)]_0^x = -\cos(x) + 1$ n'a pas de limite qd $x \to +\infty$, donc $\int_0^x \sin(t)dt$ diverge et par suite $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(t)dt$ diverge.

Exemples

1) Etudier la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt$

Pour $x > 0$: $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = [\arctan t]_0^x = \arctan x \to \frac{\pi}{2}$, qd $x \to +\infty$.

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}$

Pour $x < 0$: $\displaystyle\int_x^0 \frac{1}{1+t^2}\,dt = [\arctan t]_x^0 = -\arctan x \to \frac{\pi}{2}$, qd $x \to -\infty$.

Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{2}$

D'où $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+t^2}\,dt + \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$

2) Etudier la convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(t)\,dt$ Pour $x > 0$:

$\displaystyle\int_0^x \sin(t)\,dt = -[\cos(t)]_0^x = -\cos(x) + 1$ n'a pas de limite qd $x \to +\infty$, donc $\displaystyle\int_0^x \sin(t)\,dt$ diverge et par suite $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(t)\,dt$ diverge.

Proposition (Exemple de référence à retenir)

Soit $a > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$

1. $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ converge $\iff \alpha > 1$,
2. $\displaystyle\int_0^{a} \frac{1}{x^\alpha} dx$ converge $\iff \alpha < 1$,

exemples

1- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ converge.

2- $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} dx$ diverge.

3- $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{x^3} dx$ diverge.

4- $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} dx$ converge.

5- $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{x} dx$ diverge.

6- $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{x} dx$ diverge.

Sommaire

Proposition :

Soient f et g deux fonctions positives continues tq $f \leq g$

1. Si $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ converge alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge.
2. Si $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ diverge alors $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ diverge.

Exemple :

Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x+1}dx$ On a : $\forall x \in [0, +\infty[$,

$0 \leq \dfrac{1}{e^x+1} \leq \dfrac{1}{e^x}$ or

$\displaystyle\int_0^t \frac{1}{e^x}dx = \int_0^t e^{-x}dx = [-e^{-x}]_0^t = -e^{-t}+1 \to 1 \ qd \ t \to +\infty$ Donc

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x}dx$ converge, d'où $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x+1}dx$ converge.

Théorème :

Soient $a \in \mathbb{R}$ et b tel que $a < b \leq +\infty$. f et g deux fonctions positives, continues sur $[a, b[$.

1. Si f et g sont équivalentes à gauche de b (resp. au voisinage de $b = +\infty$) alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ sont de même nature.
2. Si $\displaystyle\lim_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, alors $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ converge $\Longrightarrow \displaystyle\int_a^b f(t)dt$ converge
3. Si $\displaystyle\lim_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$, alors $\displaystyle\int_a^b g(t)dt$ diverge $\Longrightarrow \displaystyle\int_a^b f(t)dt$ diverge

Exemples

1) Etudier la convergence des intégrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x-1}{x^{3/2}}dx$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^5+1}}dx$.

- $\dfrac{e^x-1}{x^{3/2}} \sim_0 \dfrac{x}{x^{3/2}} = \dfrac{1}{x^{1/2}}$ or $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^{1/2}}dx$ converge donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x-1}{x^{3/2}}dx$ converge.
- $\dfrac{x}{\sqrt{x^5+1}} = \dfrac{x}{x^{5/2}\sqrt{1+\frac{1}{x^5}}} = \dfrac{1}{x^{3/2}\sqrt{1+\frac{1}{x^5}}} \sim_\infty \dfrac{1}{x^{3/2}}$

Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}$ converge donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^5+1}}dx$ converge.

2) Etudier la convergence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sin t}$

On a $\dfrac{1}{\sin t} \sim_0 \dfrac{1}{t}$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t}dt$ diverge, donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sin t}dt$ diverge.

Exemples

1) Etudier la convergence des intégrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x - 1}{x^{3/2}} dx$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^5+1}} dx$.

- $\displaystyle\frac{e^x - 1}{x^{3/2}} \sim_0 \frac{x}{x^{3/2}} = \frac{1}{x^{1/2}}$ or $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^{1/2}} dx$ converge donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x - 1}{x^{3/2}} dx$ converge.
- $\displaystyle\frac{x}{\sqrt{x^5+1}} = \frac{x}{x^{5/2}\sqrt{1+\frac{1}{x^5}}} = \frac{1}{x^{3/2}\sqrt{1+\frac{1}{x^5}}} \sim_\infty \frac{1}{x^{3/2}}$

Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}$ converge donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^5+1}} dx$ converge.

2) Etudier la convergence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sin t}$

On a $\displaystyle\frac{1}{\sin t} \sim_0 \frac{1}{t}$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t} dt$ diverge, donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sin t} dt$ diverge.

Exemples

1) Etudier la convergence des intégrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x-1}{x^{3/2}}dx$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^5+1}}dx$.

- $\displaystyle\frac{e^x-1}{x^{3/2}} \sim_0 \frac{x}{x^{3/2}} = \frac{1}{x^{1/2}}$ or $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^{1/2}}dx$ converge donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x-1}{x^{3/2}}dx$ converge.
- $\displaystyle\frac{x}{\sqrt{x^5+1}} = \frac{x}{x^{5/2}\sqrt{1+\frac{1}{x^5}}} = \frac{1}{x^{3/2}\sqrt{1+\frac{1}{x^5}}} \sim_\infty \frac{1}{x^{3/2}}$

Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}$ converge donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^5+1}}dx$ converge.

2) Etudier la convergence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sin t}$

On a $\displaystyle\frac{1}{\sin t} \sim_0 \frac{1}{t}$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t}dt$ diverge, donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sin t}dt$ diverge.

Exemples

1) Etudier la convergence des intégrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x - 1}{x^{3/2}} dx$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^5+1}} dx$.

- $\displaystyle\frac{e^x - 1}{x^{3/2}} \sim_0 \frac{x}{x^{3/2}} = \frac{1}{x^{1/2}}$ or $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^{1/2}} dx$ converge donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x - 1}{x^{3/2}} dx$ converge.
- $\displaystyle\frac{x}{\sqrt{x^5+1}} = \frac{x}{x^{5/2}\sqrt{1+\frac{1}{x^5}}} = \frac{1}{x^{3/2}\sqrt{1+\frac{1}{x^5}}} \sim_\infty \frac{1}{x^{3/2}}$

Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}$ converge donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^5+1}} dx$ converge.

2) Etudier la convergence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sin t}$

On a $\displaystyle\frac{1}{\sin t} \sim_0 \frac{1}{t}$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t} dt$ diverge, donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sin t} dt$ diverge.

Exemples

1) Etudier la convergence des intégrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x-1}{x^{3/2}}dx$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^5+1}}dx$.

- $\displaystyle\frac{e^x-1}{x^{3/2}} \sim_0 \frac{x}{x^{3/2}} = \frac{1}{x^{1/2}}$ or $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^{1/2}}dx$ converge donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x-1}{x^{3/2}}dx$ converge.
- $\displaystyle\frac{x}{\sqrt{x^5+1}} = \frac{x}{x^{5/2}\sqrt{1+\frac{1}{x^5}}} = \frac{1}{x^{3/2}\sqrt{1+\frac{1}{x^5}}} \sim_\infty \frac{1}{x^{3/2}}$

Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}$ converge donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^5+1}}dx$ converge.

2) Etudier la convergence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sin t}$

On a $\displaystyle\frac{1}{\sin t} \sim_0 \frac{1}{t}$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t}dt$ diverge, donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sin t}dt$ diverge.

Corollaire

Soit f une fonction positive et continue sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$, on a :

1. Si $f(x) \sim_{+\infty} \frac{C}{x^\alpha}$ $(C \neq 0)$ alors $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ et $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}dx$ sont de même nature, donc

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ converge si et seulement si } \alpha > 1$$

2. Si $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha f(x) = 0$ et $\alpha > 1$ alors $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge.
3. Si $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha f(x) = +\infty$ et $\alpha \leq 1$ alors $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ diverge.

Exemples

Etudier la nature des intégrales $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$, $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t}dt$, $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}dt$.

$\rightarrow \lim_{t\to+\infty} t^2 e^{-t^2} = 0$ et $2 > 1$ alors $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$ converge.

$\rightarrow \lim_{t\to+\infty} t\frac{\ln t}{t} = \lim_{t\to+\infty} \ln t = +\infty$ et $1 \leq 1$ alors $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t}dt$ diverge.

$\rightarrow \lim_{t\to+\infty} t^{3/2}\frac{\ln t}{t^2} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln t}{t^{1/2}} = 0$ et $\frac{3}{2} > 1$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}dt$ converge.

$\triangle$ On remarque qu'on n'obtient rien si on multiple $\frac{\ln t}{t^2}$ par t ou par t^2 en effet :

$\lim_{t\to+\infty} t^2\frac{\ln t}{t^2} = \lim_{t\to+\infty} \ln t = +\infty$ mais $\alpha = 2 > 1$.

$\lim_{t\to+\infty} t\frac{\ln t}{t^2} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$ mais $\alpha = 1 \leq 1$.

Exemples

Etudier la nature des intégrales $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$, $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t}dt$, $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}dt$.

$\rightarrow \lim_{t\to+\infty} t^2 e^{-t^2} = 0$ et $2 > 1$ alors $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$ converge.

$\rightarrow \lim_{t\to+\infty} t\frac{\ln t}{t} = \lim_{t\to+\infty} \ln t = +\infty$ et $1 \leq 1$ alors $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t}dt$ diverge.

$\rightarrow \lim_{t\to+\infty} t^{3/2}\frac{\ln t}{t^2} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln t}{t^{1/2}} = 0$ et $\frac{3}{2} > 1$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}dt$ converge.

$\triangle$ On remarque qu'on n'obtient rien si on multiple $\frac{\ln t}{t^2}$ par t ou par t^2 en effet :

$\lim_{t\to+\infty} t^2\frac{\ln t}{t^2} = \lim_{t\to+\infty} \ln t = +\infty$ mais $\alpha = 2 > 1$.

$\lim_{t\to+\infty} t\frac{\ln t}{t^2} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$ mais $\alpha = 1 \leq 1$.

Exemples

Etudier la nature des intégrales $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$, $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t}dt$, $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}dt$.

$\rightarrow \lim\limits_{t\to+\infty} t^2e^{-t^2} = 0$ et $2 > 1$ alors $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$ converge.

$\rightarrow \lim\limits_{t\to+\infty} t\frac{\ln t}{t} = \lim\limits_{t\to+\infty} \ln t = +\infty$ et $1 \leq 1$ alors $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t}dt$ diverge.

$\rightarrow \lim\limits_{t\to+\infty} t^{3/2}\frac{\ln t}{t^2} = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{\ln t}{t^{1/2}} = 0$ et $\frac{3}{2} > 1$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}dt$ converge.

$\triangle$ On remarque qu'on n'obtient rien si on multiple $\frac{\ln t}{t^2}$ par t ou par t^2 en effet :

$\lim\limits_{t\to+\infty} t^2\frac{\ln t}{t^2} = \lim\limits_{t\to+\infty} \ln t = +\infty$ mais $\alpha = 2 > 1$.

$\lim\limits_{t\to+\infty} t\frac{\ln t}{t^2} = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$ mais $\alpha = 1 \leq 1$.

Exemples

Etudier la nature des intégrales $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$, $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t}\,dt$, $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}\,dt$.

$\rightarrow \lim\limits_{t\to+\infty} t^2 e^{-t^2} = 0$ et $2 > 1$ alors $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ converge.

$\rightarrow \lim\limits_{t\to+\infty} t\frac{\ln t}{t} = \lim\limits_{t\to+\infty} \ln t = +\infty$ et $1 \leq 1$ alors $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t}\,dt$ diverge.

$\rightarrow \lim\limits_{t\to+\infty} t^{3/2}\frac{\ln t}{t^2} = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{\ln t}{t^{1/2}} = 0$ et $\frac{3}{2} > 1$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}\,dt$ converge.

$\triangle$ On remarque qu'on n'obtient rien si on multiple $\frac{\ln t}{t^2}$ par t ou par t^2 en effet :

$\lim\limits_{t\to+\infty} t^2\frac{\ln t}{t^2} = \lim\limits_{t\to+\infty} \ln t = +\infty$ mais $\alpha = 2 > 1$.

$\lim\limits_{t\to+\infty} t\frac{\ln t}{t^2} = \lim\limits_{t\to+\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$ mais $\alpha = 1 \leq 1$.

Corollaire

Soit f une fonction positive et continue sur $[a, b[$, a et $b \in \mathbb{R}$, $a < b$, on a :

1. Si $f(x) \sim_b \frac{A}{(b-x)^\alpha}$ $(A \in \mathbb{R}^*)$ alors $\int_a^b f(x)dx$ et $\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha}dx$ sont de même nature, donc
$$\int_a^b f(x)dx \text{ converge si et seulement si } \alpha < 1$$
2. Si $\lim\limits_{x \to b-} (b-x)^\alpha f(x) = 0$ et $\alpha < 1$ alors $\int_a^b f(x)dx$ converge.
3. Si $\lim\limits_{x \to b-} (b-x)^\alpha f(x) = +\infty$ et $\alpha \geq 1$ alors $\int_a^b f(x)dx$ diverge.

Exemple

Donner la nature de $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^4-1}}dx$

Sur $]1,2]$ la fonction $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^4-1}}$ est positive et continue

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x-1)(x+1)(x^2+1)}} = \frac{1}{(x-1)^{\frac{1}{2}}\sqrt{(x+1)(x^2+1)}}$$

On a

$f(x) \sim_1 \frac{1}{2}\frac{1}{(x-1)^{\frac{1}{2}}}$

Or $\int_1^2 \frac{1}{(x-1)^{\frac{1}{2}}}dx$ converge donc $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^4-1}}dx$ converge

Définition

Soit f une fonction continue sur $[a, b[$ où $a < b \leq +\infty$. L'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ est dite absolument convergente si $\int_a^b |f(t)|dt$ converge

Théorème :

Une intégrale absolument convergente est convergente.

$$\int_a^b |f(t)|dt \text{ converge} \Longrightarrow \int_a^b f(t)dt \text{ converge}$$

intégrale absolument convergente

Définition

Soit f une fonction continue sur $[a, b[$ où $a < b \leq +\infty$. L'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ est dite absolument convergente si $\int_a^b |f(t)|dt$ converge

Théorème :

Une intégrale absolument convergente est convergente.

$$\int_a^b |f(t)|dt \text{ converge} \Longrightarrow \int_a^b f(t)dt \text{ converge}$$

Exemple

Etudier la convergence de l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{2\sin t - 3\cos t}{t^2} dt$

$\forall t \in [1, +\infty[$ on a $\mid \frac{2\sin t - 3\cos t}{t^2} \mid \leq \frac{5}{t^2}$

or $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ converge donc $\int_1^{+\infty} \frac{5}{t^2} dt$ converge d'où

$\int_1^{+\infty} \mid \frac{2\sin t - 3\cos t}{t^2} \mid dt$ converge.

D'où $\int_1^{+\infty} \frac{2\sin t - 3\cos t}{t^2} dt$ converge.

Théorème : Intégration par parties

Soient f et g deux fonctions de classe C^1 sur $[a, b[$ $(a < b \leq +\infty)$. Si $\lim_{x \to b} f(x)g(x)$ existe dans $\mathbb{R}$ alors les intégrales $\int_a^b f(t)g'(t)dt$ et $\int_a^b f'(t)g(t)dt$ sont de même nature, et en cas de convergence on a :

$$\int_a^b f(t)g'(t)dt = \lim_{x \to b} f(x)g(x) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(t)g(t)dt$$

Exemple

Etudier la nature de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$

Posons

$$g = \frac{1}{t}, \ g' = -\frac{1}{t^2}$$

$$f = -\cos t, \quad f' = \sin t$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$ donc $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$ sont de même nature, or $|\frac{\cos t}{t^2}| \leq \frac{1}{t^2}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} dt$ converge donc $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$ converge d'où $\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge.

Exercice 1 :

Calculer les intégrales suivantes dans le cas de la convergence.

1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}dt$; 2) $\displaystyle\int_0^1 \ln t \, dt$; 3) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t\ln t}dt$; 4) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^2}dt$

Exercice 2 :

Etudier la convergence des intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2}dt$; b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(t^2)}{t^2}dt$