
"Les Séries Numériques"

Exercice 1. Donner la nature des séries de terme général :

$$1) u_n = \frac{n}{3n+1}, \quad 2) u_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n, \quad 3) u_n = e^{-\frac{1}{n^2}}.$$

$$4) u_n = \frac{1}{5n^{\frac{3}{2}}}, \quad 5) u_n = \frac{2}{n^{\frac{1}{2}}}, \quad 6) u_n = \sin\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

$$7) u_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}, \quad 8) u_n = \arcsin\left(\frac{2n}{4n^3-1}\right), \quad 9) u_n = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

$$10) u_n = \log\left(1 + \frac{1}{n^2}\right), \quad 11) u_n = \log(n) \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \log\left(1 + \frac{1}{n^2}\right), \quad 12) u_n = \frac{n^2}{n!}.$$

$$13) u_n = \left(1 + \frac{a}{n}\right)^{-n^2}, \quad 14) u_n = \frac{a^n}{n^\alpha n!} \quad \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } a > 0, \quad 15) u_n = \left(\frac{n}{4n-1}\right)^{2n}.$$

$$16) u_n = \left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^{n^2}, \quad 17) u_n = \frac{(-1)^n}{2n-1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad 18) u_n = \frac{(-1)^n}{n^2 + \sin(n^2)}.$$

$$19) u_n = \frac{(-1)^n}{n + e^{-n}}, \quad 20) u_n = (-1)^n \frac{\log(n)}{n} + \frac{1}{n \log(n)}.$$

Exercice 2. Donner la nature et calculer la somme des séries de terme général :

$$1) u_n = \frac{1}{n(n+1)}, \quad n > 0,$$

$$2) u_n = \arctan\left(\frac{1}{1+n+n^2}\right), \quad (\text{Ind : } \arctan(a) - \arctan(b) = \arctan\left(\frac{a-b}{1+ab}\right), \quad ab > -1).$$

Exercice 3. 1. Donner la nature et la valeur éventuelle de $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t \log(t)}$.

2. Soit la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{n \log(n)}$.

– a) $\sum u_n$ est elle absolument convergente.

– b) Donner la nature de $\sum u_n$. Conclure.