Intégrales et Primitives

Exercice 1. Calculer en utilisant les sommes de Riemann les limites des suites suivantes :

$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2nk}}$, $u_n = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\sin(\frac{k\pi}{n})$ $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{2n^2+2nk+k^2}$

$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{8k^3+n^3}$, $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \cos^2(\frac{k\pi}{n})$, $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\sqrt[n]{a^k}$, $u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{k+1}{kn+n^2}$.

Exercice 2. Calculer les suivantes :

0) $\int_{-2}^{2} |x^2+2x-3|dx$ 1) $\int_0^x \cos^2(t)\sin^2(t)dt$; 2) $\int \sin^7(t)dt$; 3) $\int e^t\cos(e^t)dt$; 4) $\int e^{-t}\cos(2t)dt$

5) $\int \frac{1}{t(1+\ln(t))}dt$; 6) $\int \frac{\cos^3(x)}{\sin^5(x)}dx$; 7) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan(x)}{1+\tan(x)}dx$; 8) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^3(x)}{(1+\cos x)^2}dx$;

9) $\int_0^x \arcsin(x)dx$; 10) $\int \frac{2x^2-x+2}{2x-3}dx$; 11) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}dx$; 12) $\int_0^1 \frac{\arctan(x)}{(1+x)^2}$ 13) $\int \frac{1+sh(x)}{1+ch(x)}$

Exercice 3. Pour $x>0$, on pose : $F(x) = \int_x^{2x} \frac{\sin(t)}{t}dt$.

1) Calculer $F'(x)$ pour tout $x>0$.

2) Trouver $\lim_{x\to 0} \frac{F(x)}{x}$.

Exercice 4. On pose $f(x) = \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t}dt$.

1) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}^*$.
2) Montrer que $e^{-2x}\ln(2) \leqslant f(x) \leqslant e^{-x}\ln(2)$, pour tout $x>0$.
3) Montrer que l'on peut pronlonger f par continuité en 0.
4) Calculer $\lim_{+\infty} f(x)$.
5) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, et calculer $f'(x)$.

Exercice 5. Soit $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}dx$ où $n\in\mathbb{N}$.

1) Calculer I_0, I_1 et I_2.

2) Vérifier que I_n est décroisante.

3) En déduire que I_n est convergente.

4) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}\ 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.

5) Donner la limite de I_n.

Exercice 6. Donner la nature et la valeur éventuelle des intégrales suivantes :

$\int_0^{+\infty} e^x dx$; $\int_0^1 \log(t)dt$;

$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\log(t)}$ $\int_1^{+\infty} \frac{\log(1+x)}{x^2}dx$

Exercice 7. (Rattrapage 2019) Pour $a \geqslant 0$, on pose $I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)(1+t^a)}dt$.

1. **a.** Calculer $I(0)$.
   b. Montrer que $I(a)$ est converge pour tout $a \geqslant 0$.
2. En utilisant le changement de variable $x = \frac{1}{t}$:
   a. Montrer que $2I(a) = I(0)$.
   b. Déduire la valeur de $I(a)$.