EX: 04 $\boxed{\text{Q.1} \quad ①\ y'' + y' - 2y = xe^{x} + \cos x}$

ESSM : $y'' + y' - 2y = 0$ $\quad$ (EC) : $r^2 + r - 2 = 0$ $\quad \Delta = 9$, $r_1 = -2$, $r_2 = 1$

$\Rightarrow y_{SSM} = Ae^{-2x} + Be^{x}$ $\quad (A,B) \in \mathbb{R}^2$

Pour la sol particulière.

on utilise " Principe de superposition des solutions "

$\Rightarrow y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$ avec y_{p_1} et y_{p_2} sont des solu particu d'equs

$(E_1) : y'' + y' - 2y = xe^{x}$

$E_2 : y'' + y' - 2y = \cos x$

Pour E_1 : on a $\alpha = 1$ est une racine simple de (E.C) $(\alpha = 1 = r_2)$

et $P(x) = x$. $\deg P = 1$

donc on cherche une solution particu sous forme $y_{p_1} = (ax+b)x e^{x}$

$y_{p_1} = (ax^2 + bx)e^{x}$

$y'_{p_1} = (2ax+b)e^{x} + (ax^2+bx)e^{x}$

$y''_{p_1} = 2ae^{x} + (2ax+b)e^{x} + (2ax+b)e^{x} + (ax^2+bx)e^{x}$

On remplace dans (E_1)

$\Rightarrow \begin{cases} 2a + 3b = 0 \\ 6a = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1/6 \\ b = -1/9 \end{cases}$

donc $\boxed{y_{p_1} = \left(\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{9}x\right)e^{x}}$

Pour E_2 : on a $\alpha = 0$ ~~n'est~~ $\neq r_1$ et r_2 et $P(x) = 1$ $(\deg P = 0)$ et $\beta = 1$

on cherche une sol parti $y_{p_2} = \underbrace{e^{0x}}_{1}(\underbrace{P_1 \cos x + P_2 \sin x}_{\text{sont des (cte)}})$

$= a\cos x + b\sin x$

$y'_{p_2} = -a\sin x + b\cos x$

$y''_{p_2} = -a\cos x - b\sin x$

on remplace dans (E_2) $\Rightarrow \begin{cases} -3a + b = 1 \\ -3b - a = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -3/10 \\ b = 1/10 \end{cases}$

Donc $\boxed{y_{p_2} = -\frac{3}{10}\cos x + \frac{1}{10}\sin x}$

$\Rightarrow y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$

$y_E = y_{SSM} + y_p$

$y_E = Ae^{-2x} + Be^{x} + \left(\frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{9}x\right)e^{x} - \frac{3}{10}\cos x + \frac{1}{10}\sin x$ $\quad (A,B) \in \mathbb{R}^2$

② $y'' + 2y' + y = ch x = \frac{1}{2}e^{x} + \frac{1}{2}e^{-x}$

ESSM $y'' + 2y' + y = 0$ $\quad r_0 = -1$, $(\Delta = 0)$

$\Rightarrow y_{SSM} = (Ax + B)e^{-x} \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$ avec y_{p_1} solp de (E_1) et y_{p_2} sol parti de (E_2)

(E_1): $y'' + 2y' + y = \frac{1}{2}e^{x}$

(E_2): $y'' + 2y' + y = \frac{1}{2}e^{-x}$

(Principe de superpositions des solutions)

Pour E_1 on a $\alpha = 1$ et $P(x) = \frac{1}{2}$ $(\deg(P) = 0)$

$\alpha = 1 \neq r_0$

donc, On cherche une solu parti sous forme $y_{p_1} = a e^{x}$

$y'_{p_1} = a e^{x}$ et $y''_{p_1} = a e^{x}$

on remplace dans (E_1) $\Rightarrow$ $4a = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{8}$

donc $\boxed{y_{p_1} = \frac{1}{8}e^{x}}$

Pour E_2 on a $\alpha = -1 = r_0$ $\Rightarrow$ $y_{p_2} = a x^2 e^{-x}$

donc on cherche une sol par

$y'_{p_2} = 2axe^{-x} - ax^2e^{-x}$

$y''_{p_2} = 2ae^{-x} - 2axe^{-x} - 2axe^{-x} + ax^2e^{-x}$

on remplace dans (E_2) $\Rightarrow$ $b = \frac{1}{4}$

$y_{p_2} = \frac{1}{4}x^2e^{-x}$

$y_E = y_{SSM} + y_{p_1} + y_{p_2}$

$y_E = e^{-x}(Ax + B) + \frac{1}{8}e^{x} + \frac{1}{4}x^2e^{-x}$

EX : 04 ③ : $y'' + y = \tan x$ $I = \mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$ Rq

(ESSM) : $y'' + y = 0$ (EC) : $r^2 + 1 = 0$

$\Delta = -4$ $r_1 = i$ et $r_2 = -i$

$\Rightarrow y_{SSM} = \underbrace{e^{i0}}_{1}(\alpha \cos x + \beta \sin x)$

On cherche une sol particulière sous la forme

$y_p = A(x) \cos x + B(x) \sin x$ [Methode de Variation de la cte (Lagrange)]

$y_p = A(x) e^{px} \cos qx + B(x) e^{px} \sin qx$

avec la condition de Lagrange

donc $A'(x)$ et $B'(x)$ vérifient le système

$$\begin{cases} A'(x) \cos x + B'(x) \sin x = 0 & (*) \\ -A'(x) \sin x + B'(x) \cos x = \tan x & (**) \end{cases}$$

$(*) \times \sin x + (**) \times \cos x \Rightarrow B'(x) \underbrace{(\sin^2 x + \cos^2 x)}_{1} = \underbrace{\tan x}_{\frac{\sin x}{\cos x}} \times \cos x$

$\Rightarrow B'(x) = \sin x$

$\Rightarrow \boxed{B(x) = -\cos x + cte}$

$(*) \Rightarrow A'(x) = -\frac{\sin^2 x}{\cos x}$ donc $A(x) = \int -\frac{\sin^2 x}{\cos x}\, dx$

on utilise Règle de Bioche

on remarque que $F(\pi - x) = -F(x)$ avec $F(x) = -\frac{\sin^2 x}{\cos x}$

donc on pose $t = \sin x$; $dt = \cos x\, dx$

$$A(x) = \int -\frac{t^2}{\cos x} \times \frac{dt}{\cos x} = \int -\frac{t^2\, dt}{\cos^2 x} = \int -\frac{t^2}{1 - \sin^2 x}\, dt$$

$$= \int \frac{-t^2}{1-t^2}\, dt = \int \frac{1 - t^2 - 1}{1 - t^2}\, dt = \int 1 - \frac{1}{1-t^2}\, dt$$

$$= \int 1 - \frac{1/2}{1-t} - \frac{1/2}{1+t}\, dt = t + \frac{1}{2}\ln|1-t| - \frac{1}{2}\ln|1+t|$$

$$= t + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right| = \sin x + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}\right)$$

d'où $y_p = \left(\sin x + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right)\right)\cos x + (-\cos x)\sin x$

$y_p = \frac{1}{2}\cos x \ln\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right) \Rightarrow \boxed{y_E = y_{SSM} + y_p}$

Sans valeur absolue
Car sur $\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$
on a $-1 < \sin x < 1$

(4) $y'' + y = \frac{1}{\sin^3 x}$ $\quad I = \mathbb{R} - \{k\pi\}$

ESSH $y'' + y = 0$ $\Delta = -4$ $r_1 = i$ et $r_2 = -i$

$y_{SSH} = \alpha \cos x + \beta \sin x$ $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$

on cherche une sol part

$y_p = A(x) \cos x + B(x) \sin x$

Condi de Lagrange $A'(x) \cos x + B'(x) \sin x = 0$

$A'(x)$ et $B'(x)$ verifient

$$\begin{cases} A'(x) \cos x + B' \sin x = 0 & (*) \\ -A'(x) \sin x + B'(x) \cos x = \frac{1}{\sin^3 x} & (**) \end{cases}$$

$(*) \times \sin x + (**) \times \cos x \Rightarrow$

$B'(x) (\underbrace{\sin^2 x + \cos^2 x}_{1}) = \frac{\cos x}{\sin^3 x}$

$\Rightarrow B'(x) = \frac{\cos x}{\sin^3 x} = \frac{\cos x}{\sin x} \times \frac{1}{\sin^2 x}$

$= \cot g x \times (-\cot g' x)$

$$\boxed{B(x) = -\frac{1}{2} \cot an^2 x}$$

Rq Vous pouvez utiliser regle de Bioche

$F(x) = \frac{\cos x}{\sin^3 x}$

$F(-x) = -F(x)$

$$\boxed{t = \tan x}$$

$dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx \Rightarrow dx = \cos^2 x \, dt$

$B(x) = \int \frac{\cos x}{\sin^3 x} \times \cos^2 x \, dt$

$B(x) = \int \frac{\cos^3 x}{\sin^3 x} dt$

$= \int \frac{1}{\tan^3 x} dt = \int \frac{1}{t^3} dt$

$$\boxed{= -\frac{1}{2t^2} = -\frac{1}{2\tan^2 x}}$$

$A'(x) = \frac{-B'(x) \times \sin x}{\cos x} = -\frac{\cos x}{\sin^3 x} \times \frac{\sin x}{\cos x}$

$A'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$

$$\boxed{A(x) = \cot an\, x + c}$$

donc $y_p = \cot an\, x \cdot \cos x + -\frac{1}{2} \cot an^2 x \times \sin x$

$y_E = y_{SSH} + y_p$

$$\boxed{y_E = \alpha \cos x + \beta \sin x + \cot an\, x \cdot \cos x - \frac{1}{2} \cot an^2 x \cdot \sin x}$$