Chapitre 2 :
Développements limités et applications

0.1 Définitions et premières propriétés

Les développements limités sont un produit de la théorie des comparaisons de fonctions. L'idée sous-jacente est de comparer toute une classe de fonctions à une certaine famille de fonctions fixées. Dans le cadre des développements limités, il s'agira de polynômes. Dit simplement, un développement limité est donc une approximation en un point d'une fonction par un polynôme.

0.1.1 Développements limités

Définition 0.1.1 *Soit $n \in N$.*

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}$.

On dit que f admet un développement limité *à l'ordre n en a (notée $\mathbf{DL}_n(a)$), s'il existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\epsilon : I \to \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in I$:*

$$f(x) = P(x-a) + (x-a)^n \epsilon(x) \quad \text{et} \quad \lim_a \epsilon = 0.$$

$x \mapsto P(x-a)$ est appelée partie régulière *du DL, $x \mapsto (x-a)^n \epsilon(x)$ est appelée* reste *d'ordre n.*

On peut également écrire :

$$f(x) \underset{x \to a}{=} P(x-a) + o((x-a)^n)$$

Un développement limité est l'approximation **locale** d'une fonction par un polynôme. L'approximation est d'autant plus précise que l'ordre du **DL** est élevé.

Exemple 0.1.1

Soit $f : x \mapsto x^3 - 2x^2 + 3x + 1$. Pour tout x, on a $f(x) = 1 + 3x - 2x^2 + x(x^2)$, avec $x^2 \underset{x \to 0}{\to} 0$.

Donc f admet un $\mathbf{DL}_2(0)$, de partie régulière $x \mapsto 1 + 3x - 2x^2$.

f admet de même un $\mathbf{DL}_3(0)$, de partie régulière $x \mapsto 1 + 3x - 2x^2 + x^3$, et de reste nul. En fait, il s'agit également d'un $\mathbf{DL}_n(0)$.

Plus genéralement, on a la propriété suivante :

Proposition 0.1.1

$$f \, \text{admet un } \mathbf{DL}_n(a) \text{de reste nul} \Leftrightarrow f \text{est un polynôme de degré au plus } n$$

Démonstration 0.1.1

- *pour le sens direct, on écrit simplement la définition du DL pour un tel ordre n. Le reste étant nul, la fonction est égale à sa partie régulière, qui est un polynôme de degré au plus n.*
- *pour le sens réciproque, on pose $g(.) = f(. + a)$, et on écrit pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x) = g(x-a) = g(x-a) + o((x-a)^n)$, qui est un $\mathbf{DL}_n(a)$ de reste nul.*

Exemple 0.1.2 *Soit f définie par*

$$\begin{array}{rccl} f: &]-1,1[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{1}{1-x} \end{array}$$

On montre par récurrence que pour tout $n \in N$ et pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$,

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \cdots + x^n + x^n \left(\frac{x}{1-x}\right)$$

$x \mapsto \dfrac{x}{1-x}$ *étant de limite nulle en 0, f admet donc un $\mathbf{DL}_n(0)$, de partie régulière $x \mapsto 1+x+\cdots+x^n$.*

Remarque : f admet un $\mathbf{DL}_n(a)$ équivaut à $f(.-a)$ admet un $\mathbf{DL}_n(0)$. On pourra donc faire l'étude des propriétés théoriques des **DL** en 0.

0.1.2 Troncature

Si on a un DL a un certain ordre n, on obtient facilement un DL d'ordre $p < n$ en tronquant la partie régulière du $\mathbf{DL}_n(a)$ à l'ordre p.

Proposition 0.1.2
Si f admet un $\mathbf{DL}_n(a)$, alors f admet un $\mathbf{DL}_p(a)$ pour tout $p < n$.
Sa partie régulière est celle du $\mathbf{DL}_n(a)$ tronquée à l'ordre p.

Démonstration 0.1.2
Sans perte de généralité, étudions le cas $a = 0$.
$f(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + xa_1 + \cdots + x^p a_p + x^{p+1}a_{p+1} + \cdots + x^n a_n + o(x^n)$
Or, $x^{p+1}a_{p+1} + \cdots + x^n a_n + o(x^n) \underset{x\to 0}{=} o(x^p)$
D'où $f(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + xa_1 + \cdots + x^p a_p + o(x^p)$

0.1.3 Unicité

Bonne nouvelle, il y a unicité du développement limité.

Théorème 0.1.1 (Unicité du DL)
Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$, $n \in N$. Il y a unicité de la partie régulière du $\mathbf{DL}_n(a)$.

Démonstration 0.1.3
Sans perte de généralité, traitons le cas $a = 0$.
Supposons l'existence de deux polynômes P et $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tels que
$f(x) \underset{x\to 0}{=} P(x) + o(x^n)$
et
$f(x) \underset{x\to 0}{=} Q(x) + o(x^n)$
On en déduit donc que $(P-Q)(x) \underset{x\to 0}{=} o(x^n)$. Or $\deg(P-Q) \leq n$. On en déduit immédiatement $P - Q = 0$.

Corollaire 0.1.1
— *Soit f une fonction paire. La partie régulière du $\mathbf{DL}_n(0)$ est un polynôme pair.*
— *Soit f une fonction impaire. La partie régulière du $\mathbf{DL}_n(0)$ est un polynôme impair.*

Démonstration 0.1.4
On écrit $f(x) \underset{x\to 0}{=} P(x) + o(x^n)$. Par parité de f, on obtient $P(-x) + o(x^n) \underset{x\to 0}{=} f(-x) \underset{x\to 0}{=} f(x) \underset{x\to 0}{=} P(x) + o(x^n)$. Par unicité du DL, on en déduit $P(X) = P(-X)$.
On raisonne de même pour les fonctions impaires.

0.1.4 Liens avec la continuité et la dérivabilité

À l'ordre 0, nous avons une caractérisation très simple pour l'existence de DL.

Proposition 0.1.3
f admet un $\mathbf{DL}_0(a)$ si et seulement si f est continue en a.

En effet, la définition se reécrit $f(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + \mathrm{o}(1)$. En passant à la limite, on a $a_0 = f(a)$. On a donc $f(x) \underset{x\to 0}{=} f(a) + \mathrm{o}(1)$, ce qui est exactement la définition de la continuité en a.

À l'ordre 1, cela va encore. Comme ci-dessus, on peut écrire :

Proposition 0.1.4
f admet un $\mathbf{DL}_1(a)$ si et seulement si f est dérivable en a.

et on montre que la partie régulière du DL est $x \mapsto f(a) + f'(a)(x-a)$.

Dans la section suivante, nous allons partiellement généraliser ces résultats aux ordres supérieurs.

0.2 Taylor-Young

0.2.1 Le théorème

Voici maintenant un théorème qui assure l'existence de **DL** à des ordres supérieurs pour une grande classe de fonctions, et permet de plus de les calculer simplement.

Théorème 0.2.1 (Taylor-Young)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, I un intervalle de $\mathbb{R}$, a dans l'intérieur de I. Soit f une fonction de I dans $\mathbb{R}$, n fois dérivable dans I.

Alors, f admet un $\mathbf{DL}_n(a)$, de partie réulière $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$, i.e.

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n)$$

Démonstration 0.2.1
Effectuons la démonstration par récurrence.

Initialisation : *si $n = 1$, f est dérivable, et on a par définition $f'(a) = \displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, i.e. $f(x) - f(a) \underset{x\to a}{\sim} f'(a)(x-a)$ ou encore $f(x) - f(a) \underset{x\to a}{=} f'(a)(x-a) + o((x-a)^1)$*

Hérédité : *supposons le résultat vrai pour n. Soit f $n+1$ fois dérivable dans I. Alors f' est n fois dérivable. On lui applique l'hypothèse de récurrence, et on peut écrire :*

$$f'(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!}(x-a)^k \underset{x\to a}{=} o(x-a)^n$$

Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe donc η tel que

$$\forall x \in I \quad |x-a| \leq \eta \Rightarrow \left| f'(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!}(x-a)^k \right| \leq \varepsilon |x-a|^n$$

Nous voudrions primitiver cette inégalité, mais les valeurs absolues sont gênantes. Distinguons deux cas :

— *Soit* $x \in [a, a+\eta]$. *On a*

$$-\varepsilon(x-a)^n \leq f'(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!}(x-a)^k \leq \varepsilon(x-a)^n$$

Primitivons entre a et x. *D'après l'inégalité des accroissements finis, on a*

$$-\frac{\varepsilon}{n+1}(x-a)^{n+1} \leq f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(a)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1} - f(a) \leq \frac{\varepsilon}{n+1}(x-a)^{n+1}$$

Soit

$$\forall x \in [a, a+\eta] \qquad \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right| \leq \frac{\varepsilon}{n+1}|x-a|^{n+1}$$

— *Soit* $x \in [a-\eta, a]$. *On a*

$$-\varepsilon(a-x)^n \leq f'(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k+1)}(a)}{k!}(x-a)^k \leq \varepsilon(a-x)^n$$

et on conclut de la même manière.

On obtient donc finalement

$$\forall x \in [a-\eta, a+\eta] \qquad \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right| \leq \frac{\varepsilon}{n+1}|x-a|^{n+1}$$

et quitte à poser $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{n+1}$, *on a donc bien le résultat voulu.*

En revanche, la réciproque est fausse. À partir de l'ordre $n = 2$, on peut trouver des fonctions admettant des $\mathbf{DL}_n$, mais qui ne sont pas n fois dérivables.

Exemple 0.2.1

Considérons

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to \quad \mathbb{R} \\ x & \mapsto \quad \begin{cases} x^3 \sin(\frac{1}{x}) & si \;\; x \neq 0 \\ 0 & si \;\; x = 0 \end{cases} \end{cases}$$

f *est* $\mathbb{C}^\infty$ *sur* $\mathbb{R}^*$

Un calcul rapide montre que pour $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f'(x) = 3x^2 \sin(\frac{1}{x}) - x\cos(\frac{1}{x})$$

qui est de limite nulle quand x *tend vers 0.*

Par ailleurs, en considérant le taux d'accroissement en 0, on voit facilement que f *est dérivable en 0 et que* $f'(0) = 0$ *– d'où l'on déduit que* $f \in \mathcal{C}^1$.

Analysons la dérivabilité de f' *en* 0 *:*

$$\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = 3x\sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x})$$

qui n'a pas de limite lorsque x *tend vers 0.*

D'où $f \notin \mathbb{C}^2$.

En revanche, en posant $g : x \mapsto x\sin(\dfrac{1}{x})$ *prolongée pas* 0 *en* 0, *on peut écrire pour tout* $x \in \mathbb{R}^*$ $f(x) = 0 + 0x + 0x^2 + x^2(g(x))$, *qui est un* $\mathbf{DL}_2(0)$ *de* f.

0.2.2 Calculs de DLs

Ce théorème nous permet de calculer immédiatement des DLs pour de nombreuses fonctions usuelles.

Exponentielle

exp est $\mathbb{C}^\infty$, et sa dérivée n$^{\text{ème}}$ est elle-même. D'après Taylor-Young (0.2.1), elle admet un DL à tout ordre n en 0 :

$$\exp(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \tag{1}$$

$$\underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \tag{2}$$

Par définition de sh et ch (comme partie impaires et paires de exp), on obtient immédiatement leur DL respectif :

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n/2} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^n) \tag{3}$$

$$\underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \tag{4}$$

$$\mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{(n-1)/2} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^n) \tag{5}$$

$$\underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \tag{6}$$

Remarquez que la parité de ch entraine la nullité des termes impairs, et nous permet donc de gagner un ordre à la fin : ainsi, on a par exemple

$$\mathrm{ch}(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^{\mathbf{5}}) \dots$$

et de même pour sh.

Fonctions trigonométriques

cos et sin sont $\mathbb{C}^\infty$, et admettent donc un développement limité à tout ordre en 0.
Par ailleurs, on a $\cos' = -\sin$, $\cos^{(2)} = -\cos$, $\cos^{(3)} = \sin$, $\cos^{(4)} = \cos$, et ainsi de suite.
Les valeurs des dérivées successives en 0 sont donc 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, 0...
On en déduit simplement la partie régulière du $\mathrm{DL}_{2n+1,0}$ de cos :

$$\cos(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) \tag{7}$$

$$\underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots \tag{8}$$

De même, pour sin,

$$\sin(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) \tag{9}$$

$$\underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \tag{10}$$

Ici aussi, la nullité d'un terme sur deux permet de gagner un ordre à la fin.

Puissances

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

Considérons la fonction $f : x \mapsto (1+x)^\alpha$. Elle est $\mathbb{C}^\infty$ en 0, et on calcule sans peine ses dérivées pour x au voisinage de 0 : $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$, $f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}\dots$ (les dérivées finissent par s'annuler si $\alpha \in \mathbb{N}$, i.e. si f est un polynôme).

On a donc

$$(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots$$

Quelques cas particuliers fréquents : pour tout n, on a :

$\alpha = 1/2$

$$\sqrt{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 - (-1)^n \frac{1.3.5\dots(2n-3)}{2.4\dots(2n)}x^n + \mathrm{o}(x^n)$$

$\alpha = -1/2$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + (-1)^n \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4\dots(2n)}x^n + \mathrm{o}(x^n)$$

$\alpha = -1$

$$\frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \dots + (-1)^n x^n + \mathrm{o}(x^n)$$

0.3 Opérations sur les DLs

Voyons mainenant comment combiner ces formules.

Dans toute cette section, n est un entier quelconque.

0.3.1 Combinaison linéaire

Proposition 0.3.1

Soient f et g admettant un $\mathbf{DL}_n(a)$, et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$. Soient P et Q les parties régulières de ces DLs. Alors $\lambda f + \mu g$ admet un $\mathbf{DL}_n(a)$ de partie régulière $\lambda P + \mu Q$.

Démonstration 0.3.1

Soient f et g comme dans l'énoncé.

On a

$$f(x) \underset{x\to a}{=} P(x-a) + o((x-a)^n)$$

et

$$g(x) \underset{x\to a}{=} Q(x-a) + o((x-a)^n)$$

On en déduit

$$(\lambda f + \mu g)(x) \underset{x\to a}{=} (\lambda P + \mu Q)(x-a) + o((x-a)^n)$$

0.3.2 Produit

Proposition 0.3.2

Soient f et g admettant un $\mathbf{DL}_n(a)$. Soient P et Q les parties régulières de ces DLs. Alors fg admet un $\mathbf{DL}_n(a)$. Sa partie régulière est obtenue comme troncature à l'ordre n de PQ.

Démonstration 0.3.2

Plaçons-nous en $a = 0$ sans perte de généralité. Soient f et g comme dans l'énoncé.

On a

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} P(x) + o(x^n)$$

et
$$g(x) \underset{x\to 0}{=} Q(x) + o(x^n)$$
On en déduit par produit
$$(fg)(x) \underset{x\to 0}{=} (PQ)(x) + o(x^n)$$
Notons $\widetilde{PQ}$ *la troncature à l'ordre* n *de* PQ*. On a* $\widetilde{PQ}(x) \underset{x\to 0}{=} PQ(x) + o(x^n)$ *d'où*
$$(fg)(x) \underset{x\to 0}{=} (\widetilde{PQ})(x) + o(x^n)$$
De plus, $d^o(\widetilde{PQ}) \leq n$*, et* $\widetilde{PQ}$ *est donc bien la partie régulière du* $\mathbf{DL}_n(0)$ *de* fg*.*

Exemple 0.3.1
Soit à obtenir un $\mathbf{DL}_4(0)$ *de* $\cos\sin$*.*
On écrit
$$\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$
$$\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)$$
Le produit des parties régulières donne :
$$(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!})(x - \frac{x^3}{3!}) = x - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^5}{8} - \frac{x^7}{144} \underset{x\to 0}{=} x - \frac{2x^3}{3} + o(x^4)$$
D'où
$$\cos(x)\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{2x^3}{3} + o(x^4)$$

Exemple 0.3.2
Voici une autre méthode pour obtenir un $\mathbf{DL}_4(0)$ *de* $\cos\sin$*.*
On écrit pour tout x *réel* $\cos(x)\sin(x) = \dfrac{\sin(2x)}{2}$*.*
On sait de plus que $\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^3}{3!} + o(x^4)$*.*
Par composition à droite, on a donc $\sin(2x) \underset{x\to 0}{=} 2x - \dfrac{8x^3}{3!} + o(x^4)$*.*
D'où
$$\cos(x)\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{2x^3}{3} + o(x^4)$$

0.3.3 Composition

Proposition 0.3.3
Soient f *admettant un* $\mathbf{DL}_n(a)$ *et* g *admettant un* $\mathbf{DL}_n(b)$*. Supposons de plus* $g(b) = a$*. Soient* P *et* Q *les parties régulières de ces DLs. Alors* fog *admet un* $\mathbf{DL}_n(a)$*. Sa partie régulière est obtenue comme troncature à l'ordre* n *de* PoQ*.*

Démonstration 0.3.3
Quitte à effectuer un changement de variable et à poser $g \to g - g(a)$*, on peut sans perte de généralité se ramener au cas où* $a = b = 0$*.*
On a pour tout x *sur un voisinage de* 0
$$f(x) = P(x) + x^n \epsilon_f(x)$$

et

$$g(x) = Q(x) + x^n \epsilon_g(x)$$

avec ϵ_f et ϵ_g de limite nulle en 0.
Écrivons $P(X) = a_n X^n + \cdots + a_0$.
On a alors

$$\begin{aligned} fog(x) &= a_n g(x)^n + \cdots + a_1 g(x) + a_0 + x^n \epsilon_f(x) \\ &= a_n(Q(x) + x^n \epsilon_g(x))^n + \cdots + a_1(Q(x) + x^n \epsilon_g(x)) + a_0 + x^n \epsilon_f(x) \end{aligned}$$

Or, pour tout $i \in [0, n]$,

$$(Q(x) + x^n \epsilon_g(x))^i = \sum_{k=0}^{i} \binom{k}{i} Q(x)^{i-k} (x^n \epsilon_g(x))^k = Q(x)^i + x^n \sum_{k=1}^{i} \left(\binom{k}{i} Q(x)^{i-k} x^{n(k-1)} \right) \epsilon_g(x)^k$$

Chacun des termes de la somme tend vers 0 lorsque x tend vers 0.
On en déduit

$$(Q(x) + x^n \epsilon_g(x))^i = Q(x)^i + x^n \epsilon_i(x)$$

où ϵ_i est de limite nulle en 0.
En réinjectant dans l'expression de fog, on obtient

$$\begin{aligned} fog(x) &= a_n Q(x)^n + \cdots + a_1 Q(x) + a_0 + x^n(\epsilon_f(x) + \epsilon_1(x) + \cdots + \epsilon_n(x)) \\ &= PoQ(x) + x^n(\epsilon_f(x) + \epsilon_1(x) + \cdots + \epsilon_n(x)) \end{aligned}$$

Par troncature, on en déduit le résultat annoncé.

0.3.4 Inverse

Proposition 0.3.4

Soient f admettant un $\mathbf{DL}_n(a)$ et telle que $f(a) \neq 0$. Alors $\frac{1}{f}$ admet un $\mathbf{DL}_n(a)$.

Démonstration 0.3.4

Soit $n \in \mathbb{N}$, et f vérifiant les hypothèses de l'énoncé.
Posons

$$g : x \mapsto \frac{1}{x + f(a)}$$

g admet un $\mathbf{DL}_n(0)$.
On a alors pour tout x au voisinage de a

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{f(x) - f(a) + f(a)} = go(f - f(a))(x)$$

D'après 0.3.3, $\frac{1}{f(x)}$ admet donc un $\mathbf{DL}_n(a)$.

La démonstration nous fournit également le moyen de calculer ce développement limité.

Exemple 0.3.3

Voici un exemple de calcul pratique :
Soit $f : x \mapsto \frac{1}{cos(x)}$

Cherchons un $\mathbf{DL}_4(0)$ de f. D'après la proposition, comme $\cos(0) = 1$, un tel DL existe. Écrivons pour tout x au voisinage de 0

$$f(x) = \frac{1}{\cos(x) - 1 + 1}$$

On a

$$1 - \cos(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$$

et

$$\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + o(x^4)$$

D'après 0.3.3, la partie régulière recherchée est la composée de ces parties régulières tronquée à l'ordre 4, i.e.

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4!}\right) + \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 + o(x^4) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{4!} + o(x^4)$$

On peut vérifier la cohérence de ce résultat effectuant le produit avec le $\mathbf{DL}_4(0)$ de cos.

0.3.5 Primitivation de DLs

Proposition 0.3.5

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable. Si f' admet un $\mathbf{DL}_n(a)$, de partie régulière $x \to a_0 + a_1 x + \dots a_n x^n$, alors f admet un $\mathbf{DL}_{n+1}(a)$ de partie régulière $x \to f(a) + a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + \dots a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$.

En d'autres termes, on peut primitiver terme à terme un DL.

Démonstration 0.3.5

Il suffit de reprendre la preuve de Taylor-Young (0.2.1).

Ce théorème permet de calculer facilement certains DLs.

Logarithme

Nous avons déjà vu que pour tout n,

$$\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \mathrm{o}(x^n)$$

Par primitivation de DL, on en déduit immédiatement que

$$\ln(1-x) \underset{x\to 0}{=} -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \dots - \frac{x^{n+1}}{n+1} + \mathrm{o}(x^{n+1})$$

Arctangente

On a $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.
Or par composée de DLs,

$$\frac{1}{1+x^2} \underset{x\to 0}{=} 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 \dots + (-1)^n x^{2n} + \mathrm{o}(x^{2n+1})$$

Par primitivation de DLs, on obtient

$$\arctan(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \mathrm{o}(x^{2n+2})$$

Fonctions circulaires réciproques

On a $\arcsin' = x \to \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
De même que précédemment, on obtient pour tout n

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + 1\frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4\dots(2n)}x^{2n} + \mathrm{o}(x^{2n+1})$$

d'où en primitivant

$$\arcsin(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{1}{2.3}x^3 + \frac{3}{8.5}x^5 + \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4\dots(2n)}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + \mathrm{o}(x^{2n+2})$$

Le $\mathbf{DL}_n(0)$ de arccos s'obtient immédiatement en remarquant que $\arccos + \arcsin = \pi/2$ sur $[-1,1]$:

$$\arccos(x) \underset{x\to 0}{=} \pi/2 - x - \frac{1}{2.3}x^3 - \frac{3}{8.5}x^5 - \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4\dots(2n)}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + \mathrm{o}(x^{2n+2})$$

0.3.6 Dérivation de DLs

Pour les dérivations de DLs, ça ne se passe pas aussi bien.

Proposition 0.3.6
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable. Si f admet un $\mathbf{DL}_{n+1}(a)$ de partie régulière P et si f' admet un $\mathbf{DL}_n(a)$ de partie régulière Q, alors $P' = Q$.

Démonstration 0.3.6
C'est un corolaire immédiat de 0.3.5.

Ce qui nous dit que l'on peut dériver des Dls d'ordre $n+1$ **uniquement si l'on sait que la dérivée admet un DL d'ordre n**. Repenser à notre exemple :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{cl} x^3 \sin(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

qui admet un $\mathbf{DL}_2(0)$, mais n'est pas deux fois dérivable.
f' n'est pas donc pas dérivable, et n'admet donc pas de $\mathbf{DL}_1(0)$.

0.4 Aller jusqu'à l'infini ?

Une question que l'on peut naturellement se poser est « que se passe-t-il si on effectue un DL jusqu'à l'infini », et en particulier « la partie régulière d'un DL tend-elle vers la fonction lorsque l'ordre du DL tend vers l'infini ».

La réponse à cette question est non. Comprendre dans quel cadre ces assertions sont vraies relève de la théorie des séries entières, donc contentons-nous ici d'un seul exemple.

Soit f définie par

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{cl} \exp(-\frac{1}{x}) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Montrons que pour tout n : $f(x) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}(x^n)$.
Considérons pour tout $x \neq 0$ le rapport $f(x)/x^n$.
— Si $x < 0$, ce rapport est nul.

— Si $x > 0$, effectuons le changement de variable $t = 1/x$. On obtient $f(x)/x^n = t^n exp(-t)$. Par croissance comparée des puissances et de l'exponentielle en $+\infty$, on a donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x)/x^n = 0$.

On en déduit que f admet un $\mathbf{DL}_n(0)$ à tout ordre n :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} 0 + 0x + 0x^2 + \cdots + 0x^n + \mathrm{o}(x^n)$$

Le DL à tout ordre de n est donc nul ! Il n'est donc pas question que le DL « converge » vers la fonction pour tout réel positif.

0.5 Calculs pratiques de DLs

— Calculons un $\mathbf{DL}_4(1)$ de $f : x \to \dfrac{1}{\exp(x)}$.

Pas besoin ici de sortir des calculs compliqués. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x) = \exp(-x)$, et Taylor-Young nous donne immédiatement le résultat :

$$f(x) \underset{x\to 1}{=} \frac{1}{e} - \frac{(x-1)}{e} + \frac{(x-1)^2}{2!e} - \frac{(x-1)^3}{3!e} + \frac{(x-1)^4}{4!e} + \mathrm{o}((x-1)^4)$$

Pas la peine d'aller faire des calculs de DLs pénibles si les dérivées sont triviales à calculer. . .

— Calculons un $\mathbf{DL}_3(1)$ de $f : x \to \dfrac{1}{\exp(x) + x}$.

Les dérivées successives sont ici un peu plus pénibles à calculer. C'est parti pour un calcul de **DL**.

Les formules que nous connaissons pour les DLs sont en 0. Commençons par effectuer un changement de variable $x \leftrightarrow t + 1$.

On obtient

$$\frac{1}{\exp(x) + x} = \frac{1}{\exp(t+1) + t + 1}$$

À l'ordre 3 en 0, on a

$$\exp(t+1) + t + 1 = e\exp(t) + t + 1 \underset{t\to o}{=} e + 1 + (e+1)t + \frac{e}{2}t^2 + \frac{e}{3!}t^3 + \mathrm{o}(t^3)$$

Pour calculer le DL d'un quotient, on cherche à se ramener à une composition avec $x \to \dfrac{1}{1 \pm x}$ avec $x \to 0$.

Il va falloir visiblement factoriser par $e + 1$ pour arriver à quelque chose de cette forme.

Écrivons avec un abus de notation [1]

$$\begin{aligned}
\frac{e+1}{\exp(t+1) + t + 1} &\underset{t\to 0}{=} \frac{1}{1 + t + \frac{e}{2(e+1)}t^2 + \frac{e}{3!(e+1)}t^3 + \mathrm{o}(t^3)} \\
&= 1 - (t + \frac{e}{2(e+1)}t^2 + \frac{e}{3!(e+1)}t^3 + \mathrm{o}(t^3)) \\
&+ (t + \frac{e}{2(e+1)}t^2 + \frac{e}{3!(e+1)}t^3 + \mathrm{o}(t^3))^2 \\
&- (t + \frac{e}{2(e+1)}t^2 + \frac{e}{3!(e+1)}t^3 + \mathrm{o}(t^3))^3 + \mathrm{o}(t^3)
\end{aligned}$$

En développant et tronquant, on obtient

1. l'abus de notation consiste à écrire des o sous le trait de fraction, ou plus généralement à l'intérieur d'une formule. Il faut penser le o comme une fonction négligeable devant la quantité indiquée.

$$\frac{1+e}{\exp(t+1)+t+1} \underset{t\to 0}{=} 1-t+1/2\frac{e+2}{e+1}t^2-1/6\frac{e+6}{e+1}t^3+\mathrm{o}(t^3)$$

soit, en revenant à la variable de départ :

$$f(x) \underset{x\to 1}{=} \frac{1}{e+1}-\frac{1}{e+1}(x-1)+1/2\frac{e+2}{(e+1)^2}(x-1)^2-1/6\frac{e+6}{(e+1)^2}(x-1)^3+\mathrm{o}((x-1)^3)$$

Remarques pratiques : Considérons les $\mathbf{DL}_n(0)$ de f et g suivantes :

$$f = P+\mathrm{o}(x^n) \quad ; \quad g = Q+\mathrm{o}(x^n).$$

i)- Pour le produit : Calcul de $\mathbf{DL}(fg)$ en 0.
Si $f \sim x^m$ avec $m<n$, il suffit de calculer $\mathbf{DL}_{n-m}(g)$.
En effet, comme $P = x^m P_1$ où P_1 est un polynôme avec $P_1(0)=1$
et on sait que

$$fg = PQ+\mathrm{o}(x^n),$$

alors $fg = x^m P_1 Q+\mathrm{o}(x^n)$, ainsi il suffit de s'arrêter dans Q à l'ordre $n-m$

ii)- Pour la composée : Calcul de $\mathbf{DL}_n(f\circ g)$ en 0.
Si $f\sim x^m$ et $n=pm$, il suffit de calculer $\mathbf{DL}_p(g)$.
En effet, on a $P^q \sim x^{mq} = \mathrm{o}(x^n)$ pour tout $q\geq p$, alors

$$\begin{aligned} Q\circ P = & \ b_0+b_1P+\ldots+b_{p-1}P^{p-1}+[b_pP^p+\ldots+b_nP^n] \\ = & \ b_0+b_1P+\ldots+b_{p-1}P^{p-1}+\mathrm{o}(x^n). \end{aligned}$$

iii)- Pour le quotient : Calcul de $\mathbf{DL}_n(\frac{f}{g})$ en 0.
Si $f\sim x^m$ et $g\sim x^m$, alors $P = x^mP_1$ et $Q = x^mQ_1$ avec $P_1(0)=1$ et $Q_1(0)=1$.
Donc on a besoin de calculer $\mathbf{DL}_{n+m}(f)$ et $\mathbf{DL}_{n+m}(g)$ en 0.
En effet,

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{x^mP_1(x)+\mathrm{o}(x^{n+m})}{x^mQ_1(x)+\mathrm{o}(x^{n+m})} \\ &= \frac{P_1(x)+\mathrm{o}(x^n)}{Q_1(x)+\mathrm{o}(x^n)}. \end{aligned}$$

iv)- Notant pour chercher le $\mathbf{DL}(\frac{f}{g})$ de plus petit ordre possible : On cherche $\mathbf{DL}(g)$ de plus petit ordre m et de partie principale non-nulle, puis on détermine $\mathbf{DL}_m(f)$ et on déduit alors $\mathbf{DL}_m(\frac{f}{g})$.

0.6 Applications

0.6.1 Calculs de limites/équivalents

Quand l'utilisation d'équivalent ne suffit pas à lever des indéterminations, on peut souvent utiliser des DLs.

Exemple 0.6.1

Soit à calculer $\lim_{x\to\infty}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)^{x^2}$
Remarquons tout d'abord que la fonction proposée est bien définie pour $x>1/\pi$.
Commençons par passer au log. Pour tout $x>1/\pi$ *:*

$$\ln\left(x\sin\frac{1}{x}\right)^{x^2} = x^2\ln(x\sin\frac{1}{x})$$

Effectuons le changement de variable $x = \dfrac{1}{t}$

$$x^2\ln\left(x\sin\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{t^2}\ln\left(\frac{\sin(t)}{t}\right)$$

Un simple équivalent à l'ordre 0 ne nous permet pas de calculer la limite de ectte expression quand t tend vers 0. En effet, $\dfrac{\sin(t)}{t} \underset{t\to 0}{\sim} 1$*, et le log est de limite nulle. Nous n'avons pas levé l'indétermination.*

Allons un cran plus loin :

$$\frac{\sin(t)}{t} \underset{t\to 0}{=} 1 - \frac{t^2}{6} + o(t^3)$$

et par composition de DLs

$$\ln\left(\frac{\sin(t)}{t}\right) \underset{t\to 0}{=} -\frac{t^2}{6} + o(t^3)$$

D'où

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^2}\ln\left(\frac{\sin(t)}{t}\right) = -\frac{1}{6}$$

et la limite recherchée est donc

$$\lim_{x\to\infty}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)^{x^2} = \exp\left(-\frac{1}{6}\right)$$

0.6.2 Dérivée, tangente et position d'une courbe par rapport à une tangente.

On suppose que f admet un **DL** à l'ordre au moins 2 en a :

$$f(a+u) = \lambda_0 + \lambda_1 u + \lambda_2 u^2 + \ldots + \lambda_n u^n + \mathrm{o}(u^n)\,; \quad n \geq 2.$$

De ce **DL**, on tire :

$$f(a) = \lambda_0\,, \quad f'(a) = \lambda_1.$$

D'où l'équation de la tangente à la courbe C de f au point A d'abscisse a : $y = \lambda_0 + \lambda_1(u-a)$.
La position de la courbe par rapport à la tangente est donnée alors par le signe de :

$$f(x) - (\lambda_0 + \lambda_1(x-a)) = \lambda_2(x-a)^2 + \ldots + \lambda_n(x-a)^n + \mathrm{o}((x-a)^n).$$

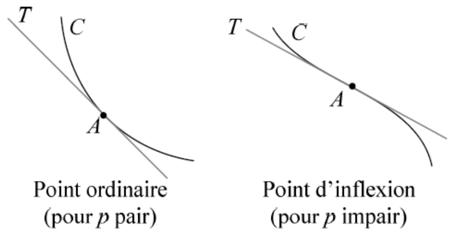
Si $\lambda_2 \neq 0$:

$$\Delta(a+u) = u^2(\lambda_2 + \varepsilon(u)).$$

Donc $\Delta(a+u)$ est de signe de λ_2 au voisinage de a.
Si $\lambda_2 = 0$, et si on suppose qu'on peut faire un **DL** jusqu'à un ordre p suffisant de sorte que le coefficient de u^p ne soit pas nul :

$$\Delta(a+u) = \lambda_p u^p + \mathrm{o}(u^n) \quad \text{où} \quad \lambda_p \neq 0.$$

Soit $\Delta(a+u) = u^p(\lambda_p + \varepsilon(u))$.
Donc $\Delta(a+u)$ est de signe de λ_p pour $u > 0$ au voisinage de a, et de signe de $(-1)^p\lambda_p$ pour $u < 0$ au voisinage de a. On a donc, selon la parité de p :



0.6.3 Extremum local

On rappelle pour f dérivable en x_0, on dit que x_0 est un point critique si $f'(x_0) = 0$. Ce point peut être maximum, ou minimum ou ni l'un ni l'autre (exemple de $f(x) = x^3$ en 0).
Si x_0 est un point critique pour f et admettant comme $\mathbf{DL}_p(x_0)$:

$$f(x) = f(x_0) + \lambda_p(x - x_0)^p + \mathrm{o}((x - x_0)^p),$$

avec $p \geq 2$ et $\lambda_p \neq 0$.
Par une étude similaire à la section précédente ; on déduit immédiatement les propriétés suivantes :

i)– Si p est impair, alors le point x_0 n'est ni maximum ni minimum .

ii)– Si p est pair et $\lambda_p > 0$, alors le point x_0 est un minimum local strict.

iii)– Si p est pair et $\lambda_p < 0$, alors le point x_0 est un maximum local strict.

0.6.4 Développements asymptotiques

Toute la théorie que nous avons présentée ici permet d'effectuer des approximations de fonctions au voisinage d'un point réel par des polynômes. Or, il est parfois important de trouver des approximations de fonctions au voisinage de $+\infty$, ce qui permet en particulier de trouver des asymptotes.

Tout comme dans l'exercice précédent, on va se ramener à un calcul de DL en 0 de la façon suivante :

Soit $f : [m, +\infty[\to \mathbb{R}$, dont nous voulons trouver une approximation en $+\infty$.

— On pose $g : t \to f(\dfrac{1}{t})$ pour $t < 1/m$, $t \longmapsto 0^+$ lorsque $t \longmapsto +\infty$

— On étudie la fonction g au voisinage de 0. Supposons par exemple que g admette un $\mathbf{DL}_n(0)$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$: $g(t) \underset{t\to 0^+}{=} P(t) + \mathrm{o}(t^n)$

— En composant à droite, on obtient $f(x) \underset{x\to +\infty}{=} P(1/x) + \mathrm{o}(1/x^n)$

et on a donc approché f par une fraction rationnelle au voisinage de $+\infty$.

Exemples 0.6.1

1, Formons un développement asymptotique de $x \to \sqrt{x(x+1)}$ à la précision $\dfrac{1}{x}$.

Pour $t > 0$, posons

$$g : t \to \sqrt{\frac{1+t}{t^2}} = \frac{1}{t}\sqrt{1+t}$$

On a donc

$$g(t) \underset{t\to 0^+}{=} \frac{1}{t}(1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + o(t^2)) = \frac{1}{t} + \frac{1}{2} - \frac{t}{8} + o(t)$$

En revenant à f,

$$f(x) \underset{x\to +\infty}{=} x + \frac{1}{2} - \frac{1}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Ce qui nous dit la courbe de f admet la droite d'équation $y = x + 1/2$ comme asymptote en $+\infty$. De plus, elle est en dessous de cette droite.

2, *Considérons la fonction $f : x \longmapsto xe^{1/x}$. définir sur $\mathbb{R}^*$. Étudions les asymptotes en $+\infty$ et $-\infty$. On pose $g(t) = f(\frac{1}{t})$. On a $g(t) = \frac{e^t}{t}$ et*

$$e^t \underset{t\to 0}{=} 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2).$$

Donc

$$g(t) \underset{t\to 0}{=} \frac{1}{t} + 1 + \frac{t}{2} + o(t).$$

Ainsi,

$$f(x) \underset{x\to\pm\infty}{=} g(\frac{1}{x}) = x + 1 + \frac{1}{2x} + o(\frac{1}{x}).$$

D'où la courbe de f admet la droite $y = x + 1$ comme asymptote en $+\infty$ et en $-\infty$. De plus, elle est en dessus de cette droite au voisinage de $+\infty$ et au dessous de cette droite au voisinage de $-\infty$.