Université Cadi Ayyad
Faculté poly-disciplinaire de Safi
Département de Mathématiques et Informatique

Année univ. : 2019-2020
Filières : SMI & SMA-S_2
Module : Analyse 3

Série N°2

Exercice 1.[Opérations sur DL]
Calculer les développements limités suivants :

1. $\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}$ à l'ordre 4 en 0 **2**. $\left(\ln(1+x)\right)^2$ à l'ordre 4 en 0
3. $\tan(x)$ à l'ordre 5 en 0 **4**. $\dfrac{\ln(1+x)}{\sin x}$ à l'ordre 3 en 0
5. $\dfrac{1}{x}$ à l'ordre 3 en 2 **6**. $\cos(x)$ à l'ordre 3 en $\dfrac{\pi}{3}$.

Exercice 2.[Composée de fonctions]
Calculer les développements limités suivants :

1. $\ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$ à l'ordre 4 en 0 **2**. $(\cos x)^{\sin x}$ à l'ordre 5 en 0.

Exercice 3.[Primitives]
Calculer les développements limités suivants :

1. $\arccos x$ à l'ordre 5 en 0 **2**. $\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt$ à l'ordre 5 en 0.

Exercice 4.[DL à l'infini]
Calculer les développements limités suivants :

1. $\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}}$ à l'ordre 3 en $+\infty$ **2**. $\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\ln x$ à l'ordre 4 en $+\infty$

Exercice 5.[DL de la réciproque]
Pour $x\in\mathbb{R}$, on pose $f(x)=x\exp(x^2)$.

1. Démontrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Justifier que f^{-1} admet un développement limité à l'ordre 4 en 0.
3. Donner ce développement limité.

Exercice 6.[Tangente et asymptote]
Soit la fonction f définie par : $f(x)=\sqrt{1+x+x^2}$, $\quad x\in\mathbb{R}$.

1. Déterminer le développement limité de f, à l'ordre 2 au voisinage de 0.
2. En déduire l'équation de la tangente au point d'abscisse $x=0$ et la position de la tangente par rapport à la courbe.
3. Déterminer une équation de l'asymptote en $+\infty$ ainsi que la position de cette asymptote par rapport à la courbe.

Exercice 7.
Soit $\alpha>0$. Pour $x\in\mathbb{R}$, on pose $f(x)=(x^2+1)^\alpha-(x^2+2)^\alpha$.

1. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ dans les cas simples suivants : $\alpha=2,\alpha=1,\alpha=\dfrac{1}{2}$.
2. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ dans le cas $0<\alpha<1$ et $\alpha>1$.

Exercice 8.

1. Déterminer le développement limité à l'ordre 4, au voisinage de $\dfrac{\pi}{2}$ de $f(x)=e^{\sin x}$.
2. Donner un équivalent de $f(x)-e$, en $\dfrac{\pi}{2}$.
3. En déduire
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{f(x)-e}{(x-\frac{\pi}{2})^2}.$$

Exercice 9.[Dérivée n-ème en 0]
On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par

$$f : x \mapsto \frac{x^4}{1+x^6}.$$

Déterminer $f^{(n)}(0)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 10.[DL par équation différentielle]
Soit f la fonction définie sur $]-1,1[$ par $f(x) = \dfrac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$.

1. Déterminer la fonction $a :]-1,1[\to \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in]-1,1[$, $f'(x) + a(x)f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$.
2. Déterminer un développement limité à l'ordre 4 en 0 de a.
3. En déduire un développement limité à l'ordre 5 en 0 de f.

Exercices supplémentaires :

Exercice 11.[Développement asymptotique d'une suite]
On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $e^x + x - n = 0$.

1. Montrer que l'équation admet une unique solution que l'on notera u_n.
2. Montrer que la suite (u_n) tend vers $+\infty$.
3. Montrer que $u_n \sim_{+\infty} \ln n$.
4. En étudiant $v_n = u_n - \ln n$, montrer que

$$u_n = \ln n - \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

Exercice 12.[sur Thm des accroissement finis]
Rappel [TAF] : Soit $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Si f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Alors pour tout $h \in]0, b-a[$, il existe $\theta \in]0,1[$ tel que :

$$f(a+h) - f(a) = hf'(a+\theta h). \quad (1)$$

Il est clair que θ dépend de a et h, qu'on le note par θ_h.

1. Si $f(x) = \dfrac{1}{x}$ et $a > 0$. Déterminer θ_h et montrer que $\lim\limits_{h\to 0^+} \theta_h = \dfrac{1}{2}$.
2. Si f une fonction de classe C^2 sur $[a,b]$ et $f''(a) \neq 0$. Montrer que $\lim\limits_{h\to 0^+} \theta_h = \dfrac{1}{2}$.
3. Si f est dérivable sur $\mathbb{R}$, tel que pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $h > 0$, on a $\theta_h = \dfrac{1}{2}$.
   i)- Montrer que $f(a+h) - f(a-h) = 2hf'(a)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $h > 0$.
   ii)- Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.
   iii)- Montrer que $f^{(3)}(a) = 0$ pour tout $a \in \mathbb{R}$. En déduire l'existence de $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, tel que :

$$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

   iv)- On suppose que la formule (1) est vérifiée seulement pour $\theta = \dfrac{1}{2}$. Montrer que $\alpha \neq 0$.