Université Cadi Ayyad
Faculté poly-disciplinaire de Safi
Département de Mathématiques et Informatique

Année univ. : 2019-2020
Filières : SMI & SMA-S_2
Module : Analyse 3

Solutions de la série N°2

Partie 1 : Ex1, Ex2, Ex3, Ex4 et Ex5

Solution de l'exercice 1[Opérations sur les DLs]

1-Il suffit d'écrire

$$\begin{aligned}\sqrt{1+x} &= 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{16}-\frac{5x^4}{128}+o(x^4)\\ \sqrt{1-x} &= 1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{16}-\frac{5x^4}{128}+o(x^4)\end{aligned}$$

et de faire la somme :

$$\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}=2-\frac{x^2}{4}-\frac{5x^4}{64}+o(x^4).$$

2-Puisque $\ln(1+x)\sim_0 x$, il est évidemment nécessaire d'effectuer un DL de $\ln(1+x)$ à l'ordre 3. En effectuant le produit, on va automatiquement gagner un ordre. Donc, en écrivant

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3)$$

on trouve

$$\big(\ln(1+x)\big)^2=x^2-x^3+\frac{11x^4}{12}+o(x^4).$$

3-On commence par calculer le DL (à l'ordre 4 simplement !) de $g(x)=\dfrac{1}{\cos x}$. Pour cela, on remarque que

$$g(x)=\frac{1}{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^4)}=\frac{1}{1-u}$$

avec

$$\begin{aligned}u &= \frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24}+o(x^4)\\ u^2 &= \frac{x^4}{4}+o(x^4)\end{aligned}$$

On déduit du DL de $\dfrac{1}{1-u}$ que

$$g(x)=1+\frac{x^2}{2}+\frac{5x^4}{24}+o(x^4).$$

On multiplie alors ce DL avec celui du sinus :

$$\sin(x)=x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)$$

et on trouve

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5).$$

4-Ici, il faut faire un DL à l'ordre 4 du numérateur et du dénominateur car les termes en x vont se simplifier. On trouve

$$\frac{\ln(1+x)}{\sin x} = \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)}{x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)} = \frac{1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)}{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)}.$$

On effectue ensuite le DL à l'ordre 3 de

$$\frac{1}{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)} = 1 + \frac{x^2}{6} + o(x^3)$$

puis le produit et on trouve finalement

$$\frac{\ln(1+x)}{\sin x} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o(x^3).$$

5-On pose $x = 2 + h$, d'où

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2+h} &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 + \frac{h}{2}} \\
&= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{h}{2} + \frac{h^2}{4} - \frac{h^3}{8} + o(h^3)\right) \\
&= \frac{1}{2} - \frac{h}{4} + \frac{h^2}{8} - \frac{h^3}{16} + o(h^3).
\end{aligned}$$

En revenant à x, on obtient

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2} - \frac{x-2}{4} + \frac{(x-2)^2}{8} - \frac{(x-2)^3}{16} + o\big(x-2)^3\big).$$

6-On pose $x = \frac{\pi}{3} + h$. Par une formule de trigonométrie :

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{\pi}{3} + h\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos h - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin h \\
&= \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4} + o(h^3) - \frac{\sqrt{3}}{2}h + \frac{\sqrt{3}}{12}h^3 + o(h^3) \\
&= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}h - \frac{h^2}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12}h^3 + o(h^3)
\end{aligned}$$

Revenant en x, on déduit

$$\cos x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3\right).$$

Solution de l'exercice 2 [DL de la composée]

1-On commence par écrire
$$\frac{\sin x}{x}=1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^4).$$
On peut donc écrire
$$\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\ln(1+u)\text{ avec }u=-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^4).$$
En particulier, on remarque que $o(u^2)=o(x^4)$. De plus, on sait que
$$\ln(1+u)=u-\frac{u^2}{2}+o(u^2).$$
On calcule les puissances de u, et on les tronque à l'ordre 4. Ainsi,
$$u=-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o(x^4)$$
$$u^2=\frac{x^4}{36}+o(x^4).$$
Il vient
$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)&=\frac{-x^2}{6}+\left(\frac{1}{120}-\frac{1}{2\times 36}\right)x^4+o(x^4)\\&=\frac{-x^2}{6}-\frac{x^4}{180}+o(x^4).\end{aligned}$$
2-On écrit
$$(\cos x)^{\sin x}=\exp\big(\sin x\ln(\cos x)\big).$$
On va donc devoir composer deux DLs, et faire un produit ! Soit d'abord $u=-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)$. On a
$$\ln(\cos x)=\ln(1+u)=u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}-\frac{u^4}{4}+\frac{u^5}{5}+o(u^5).$$
D'autre part,
$$\begin{aligned}u&=-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)\\u^2&=\frac{x^4}{4}+o(x^5)\\u^3&=o(x^5)\\u^4&=o(x^5)\\u^5&=o(x^5)\end{aligned}$$
Il vient
$$\ln(\cos x)=-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}+o(x^5).$$
On en déduit
$$\begin{aligned}\sin(x)\ln(\cos x)&=\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)\right)\left(-\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}+o(x^5)\right)\\&=-\frac{x^3}{2}+o(x^5)\end{aligned}$$
Finalement, on pose $v=-\frac{x^3}{2}+o(x^3)$, et on voit que $v^2=o(x^5)$. On obtient donc
$$\exp\big(\sin x\ln(\cos x)\big)=\exp(v)=1+v+O(v^2)=1-\frac{x^3}{2}+o(x^5).$$

Solution de l'exercice 3 [DL à l'infini]

Solution : On pose $u = \frac{1}{x}$, de sorte que

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}} &= \sqrt{1+2u}\\ &= 1+u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{2}+o(u^3)\\ &= 1+\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{2x^3}+o\left(\frac{1}{x^3}\right).\end{aligned}$$

On commence par écrire

$$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\ln x = \ln\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right).$$

On pose alors $u = \frac{1}{x}$, puis on écrit, pour se ramener à un DL du logarithme en 0,

$$\ln\left(1+\sqrt{1+u^2}\right) = \ln\left(1+\frac{\sqrt{1+u^2}-1}{2}\right).$$

Or,

$$\frac{\sqrt{1+u^2}-1}{2} = \frac{u^2}{4}-\frac{u^4}{16}+o(u^4)$$

d'où, par composition de DLS,

$$\ln\left(1+\sqrt{1+u^2}\right) = \frac{u^2}{4}-\frac{3u^4}{32}+o(u^4).$$

Revenant à la fonction initiale, on trouve

$$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\ln x = \ln 2+\frac{1}{4x^2}-\frac{3}{32x^4}+o\left(\frac{1}{x^4}\right).$$

Solution de l'exercice 4 [DL d'une primitive]

1-La fonction arccos est dérivable en 0, et sa dérivée vaut

$$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Cette fonction est de classe C^∞ autour de 0, elle admet au moins un développement limité à l'ordre 4 en 0. Pour le calculer, on commence par écrire que

$$\frac{1}{1-x^2} = 1+x^2+x^4+o(x^4).$$

Posons $u = x^2+x^4+o(x^4)$ et remarquons que $u^2 = x^4+o(x^4)$. Du développement limité de $\sqrt{1+u}$,

$$\sqrt{1+u} = 1+\frac{u}{2}-\frac{u^2}{8}+o(u^2),$$

on déduit que

$$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -1-\frac{x^2}{2}-\frac{3}{8}x^4+o(x^4).$$

On intègre ce développement limité. Tenant compte de $\arccos(0)=\frac{\pi}{2}$, il vient

$$\arccos(x)=\frac{\pi}{2}-x-\frac{x^3}{6}-\frac{3}{40}x^5+o(x^5).$$

2-La méthode est similaire. On remarque que

$$e^{x^2}=1+x^2+\frac{x^4}{2}+o(x^4).$$

En intégrant, on trouve que

$$\int_0^x e^{t^2}dt=0+x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{10}+o(x^5).$$

<u>Solution de l'exercice 5</u> [DL de la fonction réciproque]
Pour $x\in\mathbb{R}$, on pose $f(x)=x\exp(x^2)$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est

$$f'(x)=(2x^2+1)\exp(x^2)>0.$$

En particulier, f est strictement croissante. De plus, $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. Puisque f est de plus continue, f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. f' ne s'annulant pas, on en déduit que f^{-1} est de classe C^∞, et donc admet un développement limité à tout ordre en 0. On remarque d'abord que $f^{-1}(0)=0$. Écrivons le DL de f^{-1} en 0 sous la forme

$$f^{-1}(y)=ay+by^2+cy^3+dy^4+o(y^4).$$

On a de plus

$$f(x)=x+x^3+o(x^4).$$

Posons $y=x+x^3+o(x^4)$. On a alors

$$\begin{array}{rcl} y & = & x+x^3+o(x^4)\\ y^2 & = & x^2+2x^4+o(x^4)\\ y^3 & = & x^3+o(x^4)\\ y^4 & = & x^4+o(x^4). \end{array}$$

Il vient

$$f^{-1}(f(x))=ax+bx^2+(a+c)x^3+(2b+d)x^4+o(x^4).$$

Mais,

$$f^{-1}(f(x))=x=x+o(x^4).$$

Par unicité des développements limités, on en déduit que $a=1$, $b=0$, $a+c=0$ et $2b+d=0$. On obtient finalement le DL suivant pour la fonction f^{-1} :

$$f^{-1}(y)=y-y^3+o(y^4).$$

On aurait pu, pour simplifier un tout petit peu les calculs, remarquer que la fonction f^{-1}, tout comme la fonction f, est impaire, et donc que les coefficients d'ordre pair du DL sont nuls.