Université Cadi Ayyad
Faculté poly-disciplinaire de Safi
Département de Mathématiques et Informatique

Année univ. : 2019-2020
Filières : SMI & SMA-S_2
Module : Analyse 3

Solutions de la série N°2

Partie 2 : Ex6, Ex7, $\cdots$, Ex11

Solution de l'exercice 6[Tangente et asymptote]
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = \sqrt{1+x+x^2}.$$
1- On écrit $f(x) = \sqrt{1+X}$ avec $X = x + x^2 \to 0$, on a $X \to 0$ lorsque $x \to 0$.
On écrit le $DL_2(0)$ de $\sqrt{1+X}$, on a
$$\sqrt{1+X} = 1 + \frac{1}{2}X - \frac{1}{8}X^2 + o(X^2)$$
et $X^2 = x^2 + o(x^2)$. Donc
$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}(x+x^2) - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2) = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + o(x^2).$$
2- Du $DL(0)$ de $f(x)$, il est clair que l'équation de la tangente en 0 est
$$y = 1 + \frac{1}{2}x.$$
On a
$$f(x) - (1 + \frac{1}{2}x) = \frac{3}{8}x^2 + o(x^2) = x^2(\frac{3}{8} + o(1)).$$
Comme $\lim_{x\to 0}(\frac{3}{8} + o(1)) = \frac{3}{8}$. Donc $f(x) - (1 + \frac{1}{2}x) \geq 0$ dans un voisinage de 0, donc la courbe est au dessus da sa tangente au voisinage de 0.
3- On pose $X = \frac{1}{x} \to 0^+$ lorsque $x \to +\infty$, et on a
$$f(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{X} + \frac{1}{X^2}} = \sqrt{\frac{X^2+X+1}{X^2}} = \frac{f(X)}{X}.$$
En calculant le DL_1 asymptotique de $f(x)$, on a
$$f(x) = \frac{1 + \frac{1}{2}X + \frac{3}{8}X^2}{X} = \frac{1}{X} + \frac{1}{2} + \frac{3}{8}X + o(X).$$
Donc
$$f(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{3}{8x} + o(\frac{1}{x}).$$
Une équation de l'asymptote en $+\infty$ est donc $y = x + \frac{1}{2}$ et on a
$$f(x) - (x + \frac{1}{2}) = \frac{3}{8x} + o(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x}(\frac{3}{8} + o(1)).$$
Cette expression est positive lorsque $x \to +\infty$. Donc la courbe est au dessus de son asymptote en $+\infty$.

Solution de l'exercice 7

Soit $\alpha > 0$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x^2+1)^\alpha - (x^2+2)^\alpha.$$

1. Pour $\alpha = 2$.

$$f(x) = 2x^2 + 1 - 4x^2 - 4 = -2x^2 - 3.$$

Alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

2. Pour $\alpha = 1$.

$$f(x) = -1,$$

Alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -1$.

3. Pour $\alpha = \frac{1}{2}$.

$$f(x) = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2+2} = \frac{-1}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+2}}.$$

Donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

2. Posons $\varphi(u) = (1+u)^\alpha$, pour $u > -1$. On a $f(x) = x^{2\alpha}(\varphi(\frac{1}{x^2}) - \varphi(\frac{2}{x^2}))$.
La fonction φ est de classe C^∞ sur $]-1,+\infty[$ et on a

$$\varphi'(x) = \alpha(1+u)^{\alpha-1}, \quad u > -1.$$

Donc le $DL_1(0)$ de φ est donné par

$$\varphi(u) = 1 + \alpha u + u\varepsilon(u) \quad \text{avec} \quad \lim_{u\to 0} \varepsilon(u) = 0.$$

On a pour tout $x > 0$:

$$f(x) = x^{2\alpha}(\frac{\alpha}{x^2} + \frac{1}{x^2}\varepsilon(\frac{1}{x^2}) - \frac{2\alpha}{x^2} - \frac{2}{x^2}\varepsilon(\frac{2}{x^2})).$$

Donc

$$f(x) = x^{2\alpha}(\frac{-\alpha}{x^2} + \frac{1}{x^2}\eta(x)),$$

où $\eta(x) = \varepsilon(\frac{1}{x^2}) - 2\varepsilon(\frac{2}{x^2}) \to 0$ lorsque $x \to +\infty$. C-à-d

$$f(x) = x^{2(\alpha-1)}(-\alpha + \eta(x)).$$

Comme $\lim_{x\to+\infty}(-\alpha + \eta(x)) = -\alpha$ on a donc
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \quad \text{si} \quad \alpha > 1$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \quad \text{si} \quad 0 < \alpha < 1$.

Solution de l'exercice 9 [Dérivée n-ème en 0]

Remarquons que la fonction est de classe C^∞. Par la formule de Taylor-Young, elle admet un développement limité à l'ordre n en 0, et le coefficient devant x^n est $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$. D'autre part, on a :

$$\frac{x^4}{1+x^6} = x^4 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^{6k} + o(x^{6n+4}).$$

Par unicité de la partie régulière d'un développement limité, si $n \equiv 4 \mod 6$, alors $f^{(n)}(0) = n!(-1)^{(n-4)/6}$, sinon, $f^{(n)}(0) = 0$.

Solution de l'exercice 8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^{\sin x}.$$

1. Au voisinage de $\frac{\pi}{2}$. Posons $x = \frac{\pi}{2} + t$, on a $t \to 0$ lorsque $x \to frac\pi 2$.

$$f(x) = e^{\sin(\frac{\pi}{2}+t)} = e^{\cos t}.$$

Calculons le DL_4 du composée, pour t voisinage de 0 on a

$$g(t) := e^{\cos t} = e^{1-\frac{t^2}{2}+\frac{t^4}{24}+o(t^2)} = e.e^{-\frac{t^2}{2}+o(t^4)}.$$

Posons $u = \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24}$, on a $u = o(t^2)$ et on a

$$e^u = 1 + u + \frac{1}{2}u^2 + o(u^2).$$

Alors

$$g(t) = e.(1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} + \frac{1}{2}(\frac{t^4}{4}) + o(t^4) = e - \frac{e}{2}t^2 - \frac{e}{6}t^4 + o(t^4).$$

Par suite $Dl_4(\frac{\pi}{2})$:

$$f(x) \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{=} e - \frac{e}{2}(x - \frac{\pi}{2})^2 - \frac{e}{6}(x - \frac{\pi}{2})^4 + o((x - \frac{\pi}{2})^4).$$

2. On a

$$f(x) - e \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{=} -\frac{e}{2}(x - \frac{\pi}{2})^2 - \frac{e}{6}(x - \frac{\pi}{2})^4 + o((x - \frac{\pi}{2})^4).$$

Donc

$$f(x) - e \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\sim} -\frac{e}{2}(x - \frac{\pi}{2})^2.$$

3. Comme conséquence, on déduit que

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{f(x) - e}{(x - \frac{\pi}{2})^2} = -\frac{e}{2}.$$

Solution de l'exercice 10 [DL par équation différentielle]

1. On dérive f et on trouve, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$f'(x) = \frac{1}{1 - x^2} + \frac{x \arcsin(x)}{(1 - x^2)\sqrt{1 - x^2}}.$$

Il suffit donc de choisir $a(x) = \frac{-x}{1 - x^2}$.

2. On a

$$\frac{1}{1 - x^2} = 1 + x^2 + x^4 + o(x^4)$$

et donc

$$\frac{-x}{1 - x^2} = -x - x^3 + o(x^4).$$

Puisque f est de classe C^∞ sur $]-1, 1[$, f admet un développement limité à tout ordre en 0 et f' aussi. De plus, le développement limité de f' peut s'obtenir à partir de celui de f en dérivant. Écrivons donc

$$\begin{aligned} f(x) &= c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 + o(x^4) \\ f'(x) &= c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 + 5c_5x^4 + o(x^4). \end{aligned}$$

3.Ainsi, un développement limité de $f'(x) + a(x)f(x)$ est donné par

$$c_1 + (2c_2 - c_0)x + (3c_3 - c_1)x^2 + (4c_4 - c_2 - c_0)x^3 + (5c_5 - c_3 - c_1)x^4 + o(x^4).$$

D'autre part, on a

$$\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + o(x^4).$$

Par unicité du développement limité, on en déduit que

$$\begin{cases} c_1 &= 1 \\ 2c_2 - c_0 &= 0 \\ 3c_3 - c_1 &= 1 \\ 4c_4 - c_2 - c_0 &= 0 \\ 5c_5 - c_3 - c_1 &= 1 \end{cases}$$

On remarque enfin que $c_0 = f(0) = 0$. On en déduit alors facilement que

$$c_0 = 0,\ c_1 = 1,\ c_2 = 0,\ c_3 = 2/3,\ c_4 = 0,\ c_5 = 8/15,$$

.

Solution de l'exercice 11 [Développement asymptotique d'une suite]
1. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x + x$ est dérivable, et sa dérivée vérifie $f'(x) = e^x + 1 > 0$. Puisque $\lim_{-\infty} f = -\infty$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$, f réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. En particulier, il existe un unique élément $u_n \in \mathbb{R}$ pour lequel $f(u_n) = n$. 2. Puisque f est strictement croissante et que $\lim_{+\infty} f = +\infty$, f^{-1} est aussi strictement croissante et vérifie également $\lim_{+\infty} f^{-1} = +\infty$. Puisque $u_n = f^{-1}(n)$, on en déduit par passage à la limite que $\lim_{+\infty} u_n = +\infty$. 3. Le point clé est de remarquer que, puisque u_n tend vers $+\infty$, on a $u_n = o(e^{u_n})$. De l'équation $e^{u_n} + u_n = n$, on en déduit

$$u_n = \log(n - u_n) = \log(n) + \log(1 - \frac{u_n}{n}),$$

Or

$$\frac{n}{u_n} = 1 + \frac{e^{u_n}}{u_n}$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = 0$, par suite $\log(1 - \frac{u_n}{n}) = -\frac{u_n}{n}(1 + o(1)) = u_n o(1)$, alors

$$u_n = \log(n) + u_n o(1),$$

càd $\log(n) = u_n + u_n o(1)$. D'où $u_n \sim \log(n)$.
4. D'après ce qui précède, on a

$$v_n = u_n - \log(n) = \log(1 - \frac{u_n}{n}) = -\frac{u_n}{n}(1 + o(1)).$$

alors $u_n = \log(n) - \frac{u_n}{n}(1 + o(1))$, or $u_n \sim \log(n)$ donc

$$u_n = \log(n) - \frac{\log(n)}{n}(1 + o(1))^2.$$

D'où

$$u_n = \log(n) - \frac{\log(n)}{n}(1 + o(1)).$$