Faculté polydisciplinaire de Safi
Dépt. MaThs & InFo
Filière SMA– Semestre 6
2014 – 2019

Module :

Analyse fonctionnelle

Mohammed Hassani

Table des matières

Préface

Ce polycopie d'analyse fonctionnelle est destiné aux étudiants de licence en mathématiques et applications SMA. Il est rédigé à ma façon toute en gardant le livre de H. Brezis : « Analyse fonctionnelle, Théorie et applications. » à la portée de ma main.
Le but de ce cours est de donner des notions et des théorèmes topologiques et algébriques abstraits qui constituent des outils mathématiques essentiels pour entamer les cycles d'études supérieurs. La partie la plus importante à mon égard est la construction de la topologie à partir d'une famille de semi normes, je conseille le lecteur de se focaliser sur ce point.

Bibliographie

- ✓ H. Brézis : Analyse fonctionnelle théorie et applications Masson fr Paris 1983 Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise.
- ✓ Hervé Queffélec, Josette Charles, Mostafa Mbekhta : Analyse fonctionnelle et théorie des opérateurs Rappels de cours et exercices corrigés. Collection : Sciences Sup, Dunod.
- ✓ Yves Sonntag : Topologie et analyse fonctionnelle : Cours de Licence avec 240 exercices et problèmes corrigés 1998.
- ✓ J. Dieudonné : Éléments d'analyse. T. I -fondements de l'analyse moderne Gauthier-Villars fr Paris 1968.
- ✓ F. Riesz, B. Nagy : Leçons d'analyse fonctionnelle, Akademiai Kiadohu Budapest 1955 Acadmie des Sciences de Hongrie.
- ✓ S. Banach : Théorie des opérations linéaires, Chealsea publishing company.
- ✓ S. Lang : Analysis II Addison-Wesley publishing company us Massachusetts 1969 Addison-Wesley series in mathematics.
- ✓ W. Rudin : Analyse réelle et complexe, édition Masson, 1975 (le monument).

Encore je le dis, la littérature est très riche sur ce sujet. Il suffit de faire une recherche sur le net pour avoir gratuitement des polycopiés (de cours et d'exercices) de différents auteurs répondant à tous les goûts.

Pré-requis

La théorie des ensembles (la théorie ZFC, pour les courageux), la topologie générale (définition de topologie, continuité, convergences, compacité...), algèbre (espaces vectoriels, base algébrique, dimension) ... sont très sollicités ans ce cours.

Avertissements

Je tiens à préciser que ce document contient probablement des erreurs de frappes (ce n'est pas grave !) et des erreurs de mathématiques (par contre çà c'est grave !) qui ont échappé à ma vigilance. Ne l'utilisez qu'avec un œil critique et n'hésitez pas à me signaler ces problèmes : m.hassani@uca.ma.

Sommaire

Chapitre 1

Théorèmes : Hahn-Banach et Baire

1.1 Théorème de Hahn-Banach

1.1.1 Théorème de Hahn-Banach, forme analytique

Théorème 1.1.1 (Le théorème de Hahn-Banach, forme analytique)

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $p : E \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall t > 0, \forall x \in E, \quad p(tx) = tp(x) \qquad \text{et} \qquad \forall x,y \in E, \quad p(x+y) \leqslant p(x) + p(y),$$

G un sous-espace vectoriel de E et g une forme linéaire sur G satisfaisant

$$g(x) \leq p(x), \forall x \in G.$$

Alors il existe une forme linéaire f sur E qui prolonge g et qui satisfait

$$f(x) \leq p(x), \forall x \in E.$$

La démonstration de ce théorème fait appel au célèbre lemme de **ZORN** (ce dernier est équivalent à l'axiome du choix) dont nous rappelons l'énoncé. Nous avons besoin de quelque définitions

Définition 1.1.2

Soit A un ensemble muni d'une relation d'ordre (pas nécessairement totale) notée $\leq$. On dit qu'un sous-ensemble $B \subset A$ est totalement ordonné si pour tout couple a, b de B on a soit $a \leq b$ ou $b \leq A$.
Soit $B \subset A$; on dit qu'un élément $c \in A$ est majorant de B si pour tout $a \in A$ on a : $a \leq c$.
On dit que $m \in A$ est un élément maximal de A si pour tout $x \in A$ tel que $m \leq x \Rightarrow x = m$.
On dit que A est inductif si tout sous-ensemble totalement ordonné de A admet un majorant.

Lemme 1.1.3 (ZORN)

Tout ensemble ordonné, inductif, non vide, admet un élément maximal.

Remarque 1.1.4. ⚠ *Le lemme de Zorn ou ses équivalents (l'axiome du choix en particulier) admet des belles conséquences parfois qui échappent à notre intuition et donne même des paradoxes : pardoxe de Banach-Tarski. Je renvoi le lecteur au fascicule d'exercices corrigés de ce module pour plus de détails sur les conséquences de ce lemme.*

Preuve (du théorème 1.1.1)**.** *Désignons par V l'ensemble des couples (M,φ), où M est un sous-espace vectoriel de E contenant G, φ une forme linéaire sur M vérifiant $\varphi(x) \leq p(x), \forall x \in M$ et $\varphi_{|G} = g$.*
On munit V de l'ordre $\leq$ défini par

$$(M,\varphi) \leq (N,\psi) \Leftrightarrow M \subset N \text{ et } \psi|_M = \varphi.$$

On montre d'abord que V est inductif pour $\leq$ non vide : D'abord, $(g,G) \in V$. Soit $(M_i,\varphi_i)_{i\in I}$ une famille totalement ordonnée. Si on pose $M = \cup_{i\in I} M_i$, il est facile de vérifier que M est un sous-espace vectoriel de E, qu'il existe une fonction $\varphi : M \to \mathbb{R}$ qui prolonge chacune des φ_i et que φ est linéaire. De plus, pour tout $x \in M$, il existe un $i \in I$ tel que $x \in M_i$, $\varphi_{|G} = g$ et on a $\varphi(x) = \varphi_i(x) \leq p(x)$. Donc (M,φ) appartient à V et est dans V la borne supérieure de la famille $(M_i,\varphi_i)_{i\in I}$.
*D'après le lemme de **Zorn**, $(V, \leq)$ admet un élément maximal (M,f). Il suffit donc de démontrer que cet élément maximal satisfait $M = E$ pour finir la démonstration. Supposons donc par l'absurde qu'il existe un $a \in E \setminus M$. On va construire alors un élément (N,φ) de V qui majore strictement (M,f). On pose pour cela $N = M \oplus \mathbb{R}.a$, on choisit $\alpha \in \mathbb{R}$ et on définit la forme linéaire φ sur N par $\varphi(x+ta) = f(x)+t\alpha$. Il suffit donc de montrer qu'on peut choisir α de sorte que l'on ait $f(x)+t\alpha \leq p(x+ta)$, pour tout x de M et tout $t \in \mathbb{R}$ (ainsi $(N,\varphi) \in V$).*
La condition précédente est satisfaite pour $t = 0$ et quel que soit $x \in M$. Pour $t > 0$ cette condition est équivalente à la condition $f(\frac{x}{t}) + \alpha \leq p(\frac{x}{t} + a)$, et puisque $\frac{x}{t} \in M$, équivalente à $\alpha \leq p(y+a) - f(y)$ pour tout $y \in M$.
Enfin, pour $t < 0$, la condition précédente est équivalente à $f(-\frac{x}{t}) - \alpha \leq p(-\frac{x}{t} - a)$, autrement $\alpha \geq -p(y-a) + f(y)$ pour tout $y \in M$ puisque $-\frac{x}{t} \in M$. On choisit donc α tel que :

$$\sup_{y\in M} f(y) - p(y-a) \leq \alpha \leq \inf_{x\in M} p(x+a) - f(x),$$

ce qui est possible si, pour tout $x,y \in M$, on a :

$$f(y) - p(y-a) \leq p(x+a) - f(x).$$

Or pour $x,y \in M$ on a :

$$f(x) + f(y) = f(x+y) \leq p(x+y) \leq p(x+a) + p(y-a).$$

On obtient

$$\sup_{y\in M} f(y) - p(y-a) \leq \inf_{x\in M} p(x+a) - f(x).$$

Ce qui prouve l'existence de α.
Ainsi $(N,\varphi) \in V$ et $(M,f) < (N,\varphi)$, ce qui contredit que (M,f) est maximale. D'où $M = E$. □

Applications du théorème de Hahn-Banach (forme analytique)

Dans ce qui suit, on désigne par E' le dual (topologique) de l'espace vectoriel normé E, **i. e.** l'espace des formes linéaires continues sur E ; E' est muni de la norme duale

$$\|f\|_{E'} := \sup_{\|x\|\leq 1} |f(x)| = \sup_{\|x\|\leq 1} f(x).$$

Lorsque $f \in E'$ et $x \in E$ on notera parfois $\langle f,x\rangle$ au lieu de $f(x)$; on dit que $\langle,\rangle$ est le produit scalaire dans la dualité E', E.

Corollaire 1.1.5

Soit G un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel normé $(E,\|\cdot\|)$ et soit $g : G \to \mathbb{R}$ une application linéaire et continue de norme

$$\|g\|_{G'} := \sup_{\|x\|\leq 1} |g(x)|.$$

Alors il existe $f \in E'$ qui prolonge g et tel que :

$$\|f\|_{E'} = \|g\|_{G'}.$$

Preuve . *Il suffit d'appliquer le théorème précédent avec* $p(x) := \|g\|_{G'}.\|x\|$. □

Corollaire 1.1.6

Pour tout $x_0 \in E$ il existe $f_0 \in E'$ tel que

$$\|f_0\| = \|x_0\| \text{ et } \langle f_0, x_0\rangle = \|x_0\|^2.$$

Preuve . *Il suffit d'appliquer le corollaire précédent avec* $G = \mathbb{R}x$ *et* $g(tx_0) = t\|x_0\|^2$ *de sorte que* $\|g\|_{G'} = \|x_0\|$. □

Corollaire 1.1.7

Pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, on a :

$$\|x\|_E = \sup_{\|f\|_{E'} \le 1} |\langle f, x\rangle| = \max_{\|f\|_{E'} \le 1} |\langle f, x\rangle| = \max_{\|f\|_{E'} = 1} \langle f, x\rangle.$$

Preuve . *Il est clair que*

$$\sup_{\|f\|_{E'} \le 1} |\langle f, x\rangle| \le \|x\|.$$

D'après le corollaire précédent, on sait qu'il existe $f_0 \in E'$ *tel que* $\|f_0\| = \|x\|$ *et* $\langle f_0, x\rangle = \|x\|^2$. *On pose* $f_1 = \|x\|^{-1} f_0$ *de sorte que* $\|f_1\| = 1$ *et* $\langle f_1, x\rangle = \|x\|$. □

Corollaire 1.1.8

Supposons que E est $\mathbb{C}$-espace vectoriel normé.
Pour tout $x \in E \setminus \{0\}$, on a :

$$\sup_{\|f\|_{E'} \le 1} |f(x)| \leqslant \|x\|_E \leqslant \sqrt{2} \sup_{\|f\|_{E'} \le 1} |f(x)|.$$

Preuve . *On a toujours*

$$\sup_{\|f\|_{E'} \le 1} |\langle f, x\rangle| \le \|x\|.$$

Posons $G = \mathbb{C}x$, $g : G \to \mathbb{R}$, $tx \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}\|x\| \,\mathfrak{Re}\, t$, $\quad p : E \to \mathbb{R}_+$, $z \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}\|z\|$. *On a* g *est* $\mathbb{R}$*-linéaire,*

$$\|g\|_{G'} \overset{def}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \sup_{\|tx\|_E = 1} |\mathfrak{Re}(t\|x\|)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(et donc $\forall z \in G,\ g(z) \leqslant p(z)$*).*
D'après le théorème de Hahn-Banach il existe une application $\mathbb{R}$*-linéaire* $h : E \to \mathbb{R}$ *telle que* $h(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\|x\|$, $h(ix) = 0$ *et* $\forall z \in E, \quad h(z) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\|z\|$ *et donc* $\|h\|_{E'} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. *Posons*

$$\begin{array}{rccc} f : & E & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & h(z) - ih(iz). \end{array}$$

On a f *est application* $\mathbb{C}$*linéaire,* $\|x\| = \sqrt{2} f(x)$ *et* $\forall z \in E$,

$$|f(z)| = \sqrt{h(z)^2 + h(iz)^2} \leqslant \|z\|.$$

En particulier $f \in E'$ *et* $\|f_{E'} \leqslant 1$. □

1.1.2 Théorème de Hahn-Banach, formes géométriques

DÉFINITION 1.1.9

On appelle hyperplan tout sous ensemble de E de la forme :

$$H := \{x \in E \,:\, f(x) = \alpha\}$$

où f est une forme linéaire sur E, non identiquement nulle et $\alpha \in \mathbb{R}$. On dit que H est l'hyperplan d'équation $[f = \alpha]$.

DÉFINITION 1.1.10

Soit $A, B \in \mathcal{P}(E)$.

- On dit que l'hyperplan $H = [f = \alpha]$ sépare A et B au sens large si $\forall a \in A$, $\forall b \in B$

$$f(a) \leqslant \alpha \leqslant f(b).$$

- On dit que l'hyperplan $H = [f = \alpha]$ sépare A et B au sens strict si il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall a \in A$, $\forall b \in B$

$$f(a) + \varepsilon \leqslant \alpha \leqslant f(b) - \varepsilon.$$

Proposition 1.1.11

S E est un espace vectoriel normé, alors
l'hyperplan d'équation $[f = \alpha]$ est fermé si et seulement si f est continue.

Preuve . *Si f est continue alors $H = f^{-1}(\{\alpha\})$ est fermé.*
Réciproquement, supposons que H est fermé. Le complémentaire C^H de H dans E est ouvert et non vide (puisque $f \neq 0_{E'}$). Soit $x_0 \in C^H$ et supposons sans perdre de généralité que $f(x_0) < \alpha$. Soit $r > 0$ tel que

$$B(x_0,r) := \{x \in E \,:\, \|x - x_0\| < r\} \subset C^H.$$

On a

$$f(x) < \alpha,\ \forall\, x \in B(x_0,r).$$

Supposons qu'il existe $x_1 \in B(x_0,r)$ tel que $f(x_1) > \alpha$. La boule étant convexe, donc

$$\forall\, t \in [0,1] \,:\, (1-t)x_0 + t x_1 \in B(x_0,r),$$

par suite $f((1-t)x_0 + tx_1) \neq \alpha, \forall\, t \in [0,1]$. Ce qui est faut puisque pour $t_{1,2} = \dfrac{f(x_1) - \alpha}{f(x_1) - f(x_0)}$, on a : $f((1-t_{1,2})x_0 + t_{1,2}x_1) = \alpha$. Par suite,

$$f(x_0 + rz) < \alpha, \forall\, z \in B(0,1).$$

Ce qui prouve que $\|f\| \leq \dfrac{1}{r}(\alpha - f(x_0))$ et donc f est continue. □

Théorème 1.1.12 (Théorème De Hahn-Banach, première forme géométrique)

Soit A, B deux sous ensembles convexes de E, non vides et disjoints. Si A est ouvert alors il existe un hyperplan fermé qui sépare A et B au sens large.

La démonstration de ce théorème est basée sur le lemme suivant :

Lemme 1.1.13

Soit $C \subset E$ un convexe ouvert non vide et soit $x_0 \in E$ avec $x_0 \notin C$. Alors il existe $f \in E'$ tel que $f(x) < f(x_0), \forall x \in C$. En particulier l'hyperplan d'équation $[f = f(x_0)]$ sépare $\{x_0\}$ et C au sens large.

Preuve . *Par translation, on peut toujours supposer que $0_E \in C$ et considéré la jauge de C qu'on note par p_C définie par*

$$\begin{array}{rccl} P_C : & E & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\} \\ & x & \longmapsto & \inf\{t > 0 \,;\, \frac{1}{t} x \in C\} \qquad \text{avec } \inf \emptyset = +\infty. \end{array}$$

On montre (en exercice !) que
$\forall t > 0, \forall x \in E,\ p_C(tx) \leqslant t p_C(x) < \infty, \forall x,y \in E, p_C(x+y) \leqslant p_C(x) + p_C(y)$ *et* $C = \{x \in E \mid {}_C(x) < 1\}$.
On pose $G := vect(x_0) = \mathbb{R}.x_0$ et on considère la forme linéaire g sur G définie par pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$g(tx_0) := t.$$

On a $g(x) \leq p_C(x), \forall x \in G$ (il suffit de distinguer les cas $t > 0$ et $t \leq 0$). Grâce au théorème de Hahn-Banach, forme analytique, il existe f une forme linéaire sur E, prolongeant g telle que $f(x) \leq p_C(x), \forall x \in E$, $f(x_0) = 1$ et $f(x) < 1, \forall x \in C$. □

Preuve (du théorème 1.1.12)**.** *On pose $C = A - B$. C un convexe (facile), C est ouvert ($C = \cup_{y \in B}(A - y)$) et $0 \notin C$ (car $A \cap B = \emptyset$). D'après le lemme 1.1.13 il existe $f \in E'$ tel que : $f(z) < 0, \forall z \in C$, autrement*

$$f(x) < f(y), \forall x \in A, \forall y \in B.$$

On fixe $\alpha \in \mathbb{R}$ avec

$$\sup_{x \in A} f(x) \leq \alpha \leq \inf_{y \in B} f(y),$$

ce qui montre que l'hyperplan d'équation $[f = \alpha]$ sépare au sens large A et B. □

Théorème 1.1.14 (Théorème De Hahn-Banach, deuxième forme géométrique)

Soit A, B deux sous ensembles convexes de E, non vides et disjoints. Si A est fermé et B est compact alors il existe un hyperplan fermé qui sépare A et B au sens strict.

Preuve . *Pour $\varepsilon > 0$ tel que les sous ensembles convexes, ouverts et non vides $A_\varepsilon := A + B(0,\varepsilon)$ et $B_\varepsilon = B + B(0,\varepsilon)$ soient disjoints (cet ε existe sinon, il existera des suites $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \to 0, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in B$ telles que $\|x_n - y_n\| < 2\varepsilon_n$; ce qui nous donnera une suite extraite $(y_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un élément $y \in A \cap B$. D'après le théorème précédent, il existe un hyperplan fermé d'équation $[f = \alpha]$ séparant A_ε et B_ε au sens large. Ce qui se traduit par :*

$$f(x + \varepsilon z) \leq \alpha \leq f(y + \varepsilon z), \forall (x,y) \in A \times B, z \in B(0,1).$$

Il en résulte que :

$$f(x) + \varepsilon\|f\| \leq \alpha \leq f(y) - \varepsilon\|f\|, \forall (x,y) \in A \times B.$$

De là, on tire que l'hyperplan $[f = \alpha]$ sépare au sens strict A et B. □

Dans l'exercice suivant, on montre que les hypothèses des théorèmes de Hahn-Banach (forme géométrique 1 et 2) sont optimales.

Exercice 1.1.15

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace des polynômes sur $\mathbb{R}$, muni de la norme sup sur $[0,1]$. Soit

$$\mathbb{R}[X]^+ := \{P \in E : P(X) = \sum_{i=1}^{n} a_i X^i, \text{ avec } a_n > 0\}$$

et

$$\mathbb{R}[X]^- := \{P \in E : P(X) = \sum_{i=1}^{n} a_i X^i, \text{ avec } a_n < 0\}.$$

1. Montrer que $\mathbb{R}[X]^+$ et $\mathbb{R}[X]^-$ sont convexes et disjoints.
2. Montrer qu'il n'existe pas d'hyperplan qui sépare $\mathbb{R}[X]^+$ et $\mathbb{R}[X]^-$.

Corollaire 1.1.16

Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel tel que $\overline{F} \neq E$. Alors il existe $f \in E' \setminus \{0_{E'}\}$ tel que :

$$\langle f,x\rangle = 0, \forall\, x \in F.$$

Preuve . *Soit $x_0 \in E, x_0 \notin \overline{F}$. On applique le théorème précédent avec $A := \overline{F}$ et $B := \{x_0\}$. Il existe $f \in E' \setminus \{0_{E'}\}$ tel que l'hyperplan $[f = \alpha]$ sépare au sens strict $\overline{F}$ et $\{x_0\}$. On a :*

$$\langle f,x\rangle < \alpha < \langle f,x_0\rangle, \forall\, x \in F.$$

Ce qui implique que $\langle f,x\rangle = 0, \forall\, x \in F$, puisque $\lambda\langle f,x\rangle < \alpha, \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$. □

Remarque 1.1.17. *D'après ce corollaire, on conclut qu'un sous-espace vectoriel F de E est dense si $\forall\, f \in E' : f\,|_F = 0 \Rightarrow f = 0_{E'}$.*

Remarque 1.1.18. *D'après le théorème de Hahn-Banach, on a : si E est un espace normé $E \neq \{0_E\}$ alors $E' \neq \{0_{E'}\}$, grâce aux corollaires 1.1.6 et 1.1.7.*
Dans cet exemple, par un exemple classique, on montrer que si E n'est pas un espace normé (n'est pas un evtlc !) cette affirmation n'est plus vraie.

Exemple 1.1.19

Si $E = L^p([0,1])$, $0 < p < 1$, muni de la distance :

$$d(f,g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)|^p\, dt,$$

alors E est un espace métrique complet, $E \neq \{0_E\}$ par contre $E' = \{0_{E'}\}$.
Soit $\varphi \in E'$. Alors $\varphi : L^p([0,1]) \to \mathbb{R}$ est linéaire et continue.
Supposons que $\varphi \neq 0$.
On a donc $Im(\varphi) = \mathbb{R}$. Par suite, il existe un $f_0 \in E$ telle que $|\varphi(f_0)| \geq 1$.
Soit F la fonction continue définie par : $F(x) = \int_0^x |f_0(t)|^p\, dt$. Puisque $\frac{1}{2}F(1) \in [0,F(1)]$, par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $F(x_0) = \frac{1}{2}F(1)$ autrement

$$\int_0^{x_0} |f_0(t)|^p\, dt = \frac{1}{2}\int_0^1 |f_0(t)|^p\, dt > 0.$$

Soit $g_1 = f_0\chi_{[0,x_0]}$ et $g_2 = f_0\chi_{]x_0,1]}$. Alors $g_1 + g_2 = f_0$ et $|f_0|^p = |g_1|^p + |g_2|^p$, et de plus on a :

$$\int_0^1 |g_1(t)|^p\, dt = \int_0^{x_0} |f_0(t)|^p\, dt = \frac{1}{2}\int_0^1 |f_0(t)|^p\, dt$$

et donc

$$\int_0^1 |g_2(t)|^p\, dt = \frac{1}{2}\int_0^1 |f_0(t)|^p\, dt.$$

Puisque $|\varphi(f_0)| \geq 1$ alors $|\varphi(g_1)| \geq \frac{1}{2}$ ou $|\varphi(g_2)| \geq \frac{1}{2}$
En effet : Si $|\varphi(g_1)| < \frac{1}{2}$ et $|\varphi(g_2)| < \frac{1}{2}$ alors

$$1 \leq |\varphi(f_0)| = |\varphi(g_1) + \varphi(g_2)| \leq |\varphi(g_1)| + |\varphi(g_2)| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

ce qui absurde.
Supposons $|\varphi(g_1)| \geq \dfrac{1}{2}$ et posons $f_1 = 2g_1$. On a $|\varphi(f_1)| \geq 1$ et

$$\int_0^1 |f_1(t)|^p\,dt = 2^p \int_0^1 |g_1(t)|^p\,dt = 2^{p-1} \int_0^1 |f(t)|^p\,dt.$$

De la même façon, par itération, on conclut $f_n \in E$ telle que

$$|\varphi(f_n)| \geq 1 \text{ et } d(f_n,0) = \int_0^1 |f_n(t)|^p\,dt = (2^{p-1})^n \int_0^1 |f_0(t)|^p\,dt.$$

Comme $p < 1$ on aura $2^{p-1} < 1$. D'où

$$\lim_{n\to+\infty} d(f_n,0) = 0.$$

Comme φ est continue, on obtient que :

$$\lim_{n\to+\infty} \varphi(f_n) = 0$$

ce qui absurde puisque $|\varphi(f_n)| \geq 1$.
Donc $\varphi = 0$. Par conséquent $(L^p([0,1]))' = \{0\}$.

1.2 Espaces de Baire

1.2.1 Théorème de Baire

Définition 1.2.1

Un espace topologique $(E,\mathcal{T})$ est dit de Baire si pour toute suite d'ouverts $(\Theta_n)_n$ dense dans E, $\bigcap_n \Theta_n$ est dense dans E i.e.

$$\forall (\Theta_n)_n \in \mathcal{T}^{\mathbb{N}},\ \left(\forall n \in \mathbb{N}, \overline{\Theta_n} = E\right) \Longrightarrow \overline{\bigcap_n \Theta_n} = E.$$

Remarque 1.2.2. *$(E,\mathcal{T})$ est de Baire* si et seulement si *pour toute suite de fermés $(F_n)_n$ telle que $\forall n$, $\mathring{F}_n = \emptyset$, on a $int(\bigcup_n F_n) = \emptyset$.*

Proposition 1.2.3

Soit $(E,\mathcal{T})$ un espace de Baire et $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fermés tels que $\cup_{n\in\mathbb{N}} F_n = E$. Alors $\Omega = \cup_{n\in\mathbb{N}} \mathring{F}_n$ est un ouvert dense dans E.

Preuve . *Soit G le fermé $E \setminus (\cup_{n\in\mathbb{N}} \mathring{F}_n)$. Il s'agit de montrer que G est d'intérieur vide.*
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le fermé $G \cap F_n$ est d'intérieur vide car $int(G \cap F_n) \subset G \cap \mathring{F}_n = \emptyset$, et comme $(E,\mathcal{T})$ est un espace de Baire,

$$\cup_{n\in\mathbb{N}} (G \cap F_n) = G \cap [\cup_{n\in\mathbb{N}} F_n] = G \cap E = G$$

est d'intérieur vide. □

Remarque 1.2.4. *Si $(E,\mathcal{T})$ est un espace de Baire non vide, alors E ne peut pas être réunion dénombrable de fermés d'intérieurs vides.*

Théorème 1.2.5 (théorème de Baire)

1. Tout ouvert d'un espace de Baire est de Baire.
2. Tout espace métrique complet est de Baire (théorème de Baire).
3. Tout espace localement compact est de Baire.

Preuve .
1. Soit $(E,\mathcal{T})$ un espace de Baire, soit $A \in \mathcal{T}$ (ouvert de E). Soit $(\theta_n)_n$ une suites d'ouverts de $(A,\mathcal{T}_A = A \cap \mathcal{T})$ denses dans A (c-à-d $\theta_n \in \mathcal{T}$ et $\theta_n \subset A \subset \overline{\theta_n}$). Posons $\theta = \cap_n \theta_n$ ($\subset A$). Il suffit de montrer que $A \subset \overline{\theta}$ (la fermeture dans E). Posons $W_n = \theta_n \cup \overline{A}^c$, on a $W_n \in \mathcal{T}$ et

$$E \subset \overline{A} \cup \left(\overline{A}\right)^c \subset \overline{\theta_n} \cup \overline{\left(\overline{A}\right)^c} \subset \overline{W_n} \subset E.$$

Puisque $(E,\mathcal{T})$ est de Baire,

$$E = \overline{\cap_n W_n} = \overline{\theta \cup \overline{A}^c} = \overline{\theta} \cup \overline{\left(\overline{A}\right)^c},$$

donc

$$A = \left(A \cap \overline{\theta}\right) \cup \underbrace{\left(A \cap \overline{\left(\overline{A}\right)^c}\right)}_{=\emptyset,\ car\ A \subset \overline{A}} = A \cap \overline{\theta}. \qquad Ainsi\ A \subset \overline{\theta}.$$

2. Soit (E,d) un espace métrique complet. Soit $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'ouverts denses dans (E,d). Notons $\theta = \cap_n \Theta_n$ et montrons que $\overline{\theta} = E$ ce qui est équivalent à montrer que toute boule ouverte non vide rencontre θ.
Soit $B(x_0,r_0)$ une boule ouverte de centre $x_0 \in E$ et de rayon $r_0 > 0$. On a $B(x_0,r_0) \cap \theta_1$ est un ouvert non vide (car θ_1 est dense) donc il existe $x_1 \in E$ et $r_1 \in]0,1[$ tels que la boule fermée $B_f(x_1,r_1) \subset B(x_0,r_0) \cap \theta_1$. Supposons que $(x_1,r_1)\cdots(x_n,r_n)$ donnés dans $E\times]0,+\infty[$ tels que $r_i \in]0,\frac{1}{n}[$ et $B_f(x_i,r_i) \subset B(x_{i-1},r_{i-1}) \cap \theta_i$. Puisque θ_{n+1} est dense dans E alors il existe $x_{n+1} \in E$ et $r_{n+1} \in]0,\frac{1}{n+1}[$ tels que

$$B_f(x_{n+1},r_{n+1}) \subset B(x_n,r_n) \cap \theta_{n+1}.$$

On a ainsi construit par récurrence la suite $(x_n,r_n))n$ dans $E\times]0,+\infty[$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $r_n < \frac{1}{n}$ et $B_f(x_n,r_n) \subset B(x_{n-1},r_{n-1}) \cap \theta_n$.
En particulier, la suite $(B_f(x_n,r_n)))_n \in \mathbb{N}^*$ est une suite décroissante de fermés de diamètres qui converge vers 0 dans l'espace complet (E,d). Donc

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} B_f(x_n,r_n) \neq \emptyset \qquad par\ conséquent\ \theta \cap B(x_0,r_0) \neq \emptyset.$$

3. Soit $(E,\mathcal{T})$ un espace localement compact. Soit $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'ouverts denses dans $(E,\mathcal{T})$. Notons $\theta = \cap_n \Theta_n$ et montrons que $\overline{\theta} = E$ ce qui est équivalent à montrer que tout ouvert V de E non vide rencontre θ.
En utilisant la densité des θ_n et que $(E,\mathcal{T})$ est localement compact, nous construisons ar récurrence une suite de compacts d'intérieurs non vides $(K_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de E telle que $\forall n > 1$, $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n-1} \cap \theta_n$ et $K_1 \subset V \cap \theta_1$. Ainsi $(K_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de compacts non vides décroissante, donc $\bigcap_n K_n \neq \emptyset$. Par conséquent, $\theta \cap V \neq \emptyset$. □

1.2.2 Corollaires

Corollaire 1.2.6

$\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Preuve . *Sinon $\mathbb{R} = \bigcup_{x\in\mathbb{R}} \{x\}$ est une réunion dénombrable des fermés pour la topologie usuelle associée à la distance usuelle $d(x,y) = |x-y|$, mais $(\mathbb{R},d)$ est complet donc il est de Baire. Ceci donne en particulier que $\mathbb{R} = \overset{\circ}{\mathbb{R}} = \emptyset$ puisque $\forall x \in \mathbb{R}$, $\overset{\circ}{\{x\}} = \emptyset$. Absurde.* □

Corollaire 1.2.7

Tout espace de Banach à base dénombrable est de dimension finie, par exemple on n'a pas de norme sur $\mathbb{R}[X]$ qui le rend complet.

Preuve . *Supposons qu'il existe un espace de Banach à base dénombrable est de dimension infinie. Soit donc $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une base de E. Pour tout entier naturel n, on pose*

$$F_n := vect(e_1, e_2, \cdots, e_n)$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le sous-espace F_n est de dimension finie donc fermé ; de plus Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le sous-espace F_n est d'intérieur vide car si une boule ouverte $B(x_0, r)$ est inclue dans F_n (avec $r > 0$), alors $x_0 \in F_n$ et $x_0 + \frac{r}{2\|e_{n+1}\|} e_{n+1} \in F_n$ par suite $e_{n+1} \in F_n$, ce qui est absurde.
D'après le théorème de Baire, $\cup_{n\geq 1} F_n$ est d'intérieur vide dans E ce qui est absurde car $\cup_{n\geq 1} F_n = E$. □

Définition 1.2.8

1. On dit que A est résiduel si elle contient une intersection dénombrable d'ouverts denses dans E.
2. On dit que A est maigre si elle est contenue dans une réunion dénombrable de fermés de E d'intérieurs vides.

Corollaire 1.2.9

Soient $(E, \mathcal{T})$ un espace de Baire et (F, d) un espace métrique. On considère une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'applications continues de E dans F, convergeant simplement vers une application f de E dans F. Alors

$$f \text{ est continue sur une partie dense de } E.$$

C-à-d l'ensemble des points où f sont continues est un résiduel.

Preuve . *Pour $n, k \in \mathbb{N}$, on pose*

$$F_{k,n} := \bigcap_{p,q\geqslant n} \{x \in E : d(f_q(x), f_p(x)) \leqslant \frac{1}{2^k}\}.$$

On a $F_{k,n}$ est un fermé de E car l'intersection des fermés est un fermé et l'image réciproque d'un fermé par une fonction continue est fermé. On a aussi, puisque f_n converge simplement vers f,

$$\forall k \in \mathbb{N},\ E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_{k,n}.$$

D'après la proposition 1.2.3

$$\Omega_k \overset{def}{=} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overset{\circ}{F}_{k,n} \qquad \text{est un ouvert dense dans } E.$$

Posons $\Omega \overset{def}{=} \bigcap_{k\geq\mathbb{N}} \Omega_k$. On a Ω est dense dans $(E, \mathcal{T})$ puisque ce dernier est de Baire. Montrons que f est continue sur Ω, pour cela soit $x_0 \in \Omega$ et soit $\varepsilon > 0$. Considérons un entier k_0 tel que $\frac{1}{k_0} < \frac{\varepsilon}{3}$ et n_0 un entier tel que $x_0 \in \overset{\circ}{F}_{k_0,n_0}$. Soit $x \in \overset{\circ}{F}_{k_0,n_0} \subset F_{k_0,n_0}$, on a $\forall p \geqslant n_0$,

$$d(f_p(x), f_p(x_0)) \leqslant d(f_p(x), f_{n_0}(x_0)) + d(f_{n_0}(x), f_{n_0}(x_0)) + d(f_{n_0}(x_0), f_p(x_0)) \leqslant \frac{2}{k_0} + d(f_{n_0}(x), f_{n_0}(x_0)).$$

En tendant $p \to \infty$, on obtient

$$\forall x \in \overset{\circ}{F}_{k_0,n_0}, \quad d(f(x), f(x_0)) \leqslant \frac{2}{k_0} + d(f_{n_0}(x), f_{n_0}(x_0)).$$

D'autre part, la continuité de f_{n_0} en x_0 implique l'existence d'un ouvert W de E contenant x_0 tel que

$$\forall x \in W, \quad d(f_{n_0}(x), f_{n_0}(x_0)) < \frac{1}{k_0}.$$

Ainsi,

$$\forall x \in W \cap \mathring{F}_{k_0,n_0}, \quad d(f(x), f(x_0)) \leqslant \frac{3}{k_0} < \varepsilon.$$

□

Exercice 1.2.10

1. Montrer que $1_{\mathbb{Q}}$ n'est pas limite simple d'une suite de fonction continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. Calculer $\lim\limits_{p\to+\infty} \lim\limits_{n\to+\infty} (\cos \pi p! x)^{2n}$.

Corollaire 1.2.11

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Alors la fonction dérivée f' est continue sur un ensemble dense de $\mathbb{R}$.

Preuve . *Il suffit de considérer la suite des fonctions*

$$\begin{array}{rccl} f_n: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & n\Big(f(x+\frac{1}{n}) - f(x)\Big) \end{array}$$

qui est une suite de fonctions continues qui converge vers f' et puisque $\mathbb{R}$ est de Baire et métrique, on d'après le corollaire précédent que la fonction dérivée f' est continue sur un ensemble dense de $\mathbb{R}$. □

Sommaire

Chapitre 2
Espaces vectoriels topologiques

2.1 Espaces vectoriels topologiques

Dans la suite $\mathbb{K}$ est un corps commutatif (souvent l'un des deux corps $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$ et parfois $\mathbb{Q}$. $(E,+,\cdot)$ désignera un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{T}$ une topologie sur E. On prendre aussi comme notation $D = \{t \in \mathbb{K} \ ; \ |t| \leqslant 1\}$ (D pour disque).

2.1.1 Quelques notions et notations algébriques

Soit A et B deux partie des E, $a \in A$, $t \in \mathbb{K}$ et $\Lambda \subset \mathbb{K}$.

Notation 2.1.1.
$a + B = \{a + b \ ; \ b \in B\}$, $A + B = \{a + b \ ; \ a \in A \text{ et } b \in B\}$, $tA = \{ta \ ; \ a \in A\}$ *et* $\Lambda A = \{ta \ ; \ t \in \Lambda \text{ et } a \in A\}$.

Définition 2.1.2

On dit que A
1. est un sous espace vectoriel de E si A hérité des lois de compositions de E est un espace vectoriel ce qui équivalent à dire que $A \neq \emptyset$ et vérifie $\forall t \in \mathbb{K}$, $\forall x,y \in A$, on a $tx + y \in A$.
2. est un sous espace affine de E s'il existe $a \in A$ tel que $A - a$ est un sous espace vectoriel de E.
3. est convexe si $\forall x,y \in A$, $[x,y] \overset{\text{def}}{=} \{tx + (1-t)y \ ; \ t \in [0,1]\} \subset A$.
4. est équilibrée si $\forall t \in D$, $\forall x \in A$, on a $tx \in A$, i.e. $DA = A$.
5. absolument convexe s'il est à la fois convexe et équilibrée.
6. absorbe B s'il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $|\lambda| \geqslant \alpha \implies B \subset \lambda A$.
7. absorbant si $\forall x \in E$, A absorbe $\{x\}$.

Remarque 2.1.3.
Tout sous espaces affines est convexe.

La propriété suivante est fondamentale malgré sa simplicité soit en son énoncé soit en sa démonstration. On la rencontre en topologie, en intégration et maintenant en analyse fonctionnelle (en algèbre en réalité). Elle est vraie pour pas mal de familles (topologies, tribus, sous groupes ...)

Proposition 2.1.4

L'intersection quelconque de sous espaces vectoriels (resp. sous espaces affines, resp. de parties convexes, resp. de parties équilibrées, resp. de parties absolument convexes) de E est un sous espace vectoriel (resp. un sous espaces affine, resp. une partie convexe, resp. une partie équilibrée, resp. une partie absolument convexe).

Preuve . *Évidentes.* □

Remarque 2.1.5. *DA est la plus petite partie équilibrée de E contenant A.*

La proposition précédente justifie l'existence de « le plus petit truc » contenant une partie A de E et est dit le truc engendré par A avec truc l'une des phrases « sous espace vectoriel », « sous espace affine », « convexe », « équilibré » ou « absolument convexe ». C'est l'intersection (qui est non vide, contient E) des tous « trucs » qui contient A.

Définition 2.1.6 (et notations)

1. Le sous espace vectoriel engendré par A est dit l'enveloppe linéaire de A, il est noté $Vect_{\mathbb{K}}(A)$ ou $Span_{\mathbb{K}}(A)$ ou simplement $Vect(A)$, si on ne craint pas la confusion.
2. Le convexe engendré par A est dit l'enveloppe convexe de A, il est noté $co(A)$.
3. L'ensemble absolument convexe engendré par A est dit l'enveloppe absolument convexe de A, il est noté $aco(A)$.
4. Le sous espace affine engendré par A est dit l'enveloppe affine de A, il est noté $Aff_{\mathbb{K}}(A)$ ou simplement $Aff(A)$, si on ne craint pas la confusion.

Proposition 2.1.7

$$co(A) \subset aco(A) \subset Aff(A) = a + Vect(A-a) \subset Vect(A) = Aff(A \cup \{0\})$$

avec $a \in A$.

Preuve . *En exercice.* □

Théorème 2.1.8

Soit $x \in E$

$$x \in Vect(A) \iff \exists n \in \mathbb{N}^*,\ \exists t_1,t_2,\cdots,t_n \in \mathbb{K},\ \exists x_1,x_2,\cdots,x_n \in A \text{ tel que } x = t_1x_1 + \cdots + t_nx_n.$$

$$x \in aco(A) \iff \exists n \in \mathbb{N}^*,\ \exists t_1,t_2,\cdots,t_n \in \mathbb{K},\ \exists x_1,x_2,\cdots,x_n \in A \text{ tel que } \begin{cases} x = t_1x_1 + \cdots + t_nx_n \\ |t_1| + \cdots + |t_n| \leqslant 1. \end{cases}$$

$$x \in co(A) \iff \exists n \in \mathbb{N}^*,\ \exists t_1,t_2,\cdots,t_n \in [0,1],\ \exists x_1,x_2,\cdots,x_n \in A \text{ tel que } \begin{cases} x = t_1x_1 + \cdots + t_nx_n \\ t_1 + \cdots + t_n = 1. \end{cases}$$

Preuve . *Facile et par une méthode maintenant standard (méthode qu'on a vu en intégration ...). Posons $F = \{x \in E \mid \exists n \in \mathbb{N}^*,\ \exists t_1,t_2,\cdots,t_n \in \mathbb{K},\ \exists x_1,x_2,\cdots,x_n \in A \text{ tel que } x = t_1x_1 + \cdots + t_nx_n\}$ puis on montre F est un sous espace vectoriel contenant A ce qui donne que $Vect(A) \subset F$, l'autre inclusion est triviale.*
Faites la même chose pour les autres implications. □

Définition 2.1.9

Une application $p\colon E \longrightarrow [0,+\infty[$ est une semi norme si

$$\begin{cases} i)\forall t \in \mathbb{K},\ \forall x \in E,\quad p(tx) = |t|p(x) \\ ii)\forall x,y \in E,\quad p(x+y) \leqslant p(x) + p(y). \end{cases}$$

Elle est une norme si de plus elle vérifie $iii)$ $p(x) = 0 \iff x = 0$.

Exercice 2.1.10
Soit p une semi norme sur E, montrer que $B_0 \overset{\text{def}}{=} \{x \in E \ ; \ p(x) < 1\}$ et $B_f \overset{\text{def}}{=} \{x \in E \ ; \ p(x) \leqslant 1\}$ sont deux parties absorbantes et absolument convexes (équilibrées et convexes).

Définition 2.1.11 (jauge ou fonction de Minkowski)

Soit A une partie de E telle que $\{t > 0 \ | \ x \in tA\} \neq \emptyset$ (e.g. A absorbante). On appelle fonction de Minkowski ou la jauge de la partie A dans E la fonction p_A définie par

$$p_A : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & [0, +\infty[\\ x & \longmapsto & \inf\{t > 0 \mid x \in tA\} \end{array}$$

Théorème 2.1.12
Si A est une partie absorbante et absolument convexe alors sa jauge p_A est une semi norme telle que $B_o \overset{\text{def}}{=} \{x \in E \ ; \ p(x) < 1\} \subset A \subset B_f \overset{\text{def}}{=} \{x \in E \ ; \ p(x) \leqslant 1\}$

Preuve . *Voir TD.* □

2.1.2 Quelques notions et notations topologiques

Pour cette sous section je renvoi le lecteur au cours de la topologie générale du semestre $S5$. Cependant je vous rappelle que la fermeture ou l'adhérence de A noté $\overline{A}$ est le plus petit fermé de l'espace topologique $(E,\mathcal{T})$ contenant A c'est l'intersection de tous les fermé contenant A. L'intérieur de A,noté $\overset{\circ}{A}$ ou $int_E(A)$, est le complémentaire dans E de la fermeture du complémentaire de A i.e. $\overset{\circ}{A} = E \setminus \left(\overline{E \setminus A}\right)$ c'est le plus grand ouvert inclut dans A.
Dans ce module on utilisera les notions (topologiques) de compacité, d'homéomorphisme, de topologie métrisable ... une révision du cours de topologie est fort utile.

2.1.3 Espaces vectoriels topologiques

Définition 2.1.13

On dit que $(E, +, \cdot, \mathcal{T})$ ou simplement $(E,\mathcal{T})$ est un espace vectoriel topologique (evt pour écrire simple) si les deux fonctions

$$\psi : \begin{array}{rcl} E \times E & \longrightarrow & E \\ (x,y) & \longmapsto & x + y \end{array} \quad \text{et} \quad \phi : \begin{array}{rcl} \mathbb{K} \times E & \longrightarrow & E \\ (t,y) & \longmapsto & t \cdot y = ty \end{array}$$

sont continues en prenant les topologies produits sur les ensembles de départs et en prenant la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$.

Proposition 2.1.14

1. Soit $(t,e) \in \mathbb{K}^* \times E$, alors

$$h : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & tx + e \end{array}$$

est un homéomorphisme.
2. $\forall x \in E$, $\mathcal{V}_E(x) = \{x + V \ ; \ V \in \mathcal{V}_E(0)\}$ avec $\mathcal{V}_E(x)$ est l'ensemble des voisinages de x.

3. Soit $V \subset E$,
$$V \in \mathcal{V}_E(0) \iff \forall t \in \mathbb{K}^*,\ \ tV \in \mathcal{V}_E(0) \iff \exists t \in \mathbb{K}^*,\ \ tv \in \mathcal{V}_E(0).$$
4. Soit $A \subset E$,
$$\overline{A} = \bigcap_{V \in \mathcal{V}_E(0)} (A+V).$$
5. $(E,\mathcal{T})$ est séparé si et seulement si $\{0\}$ est fermé.

Preuve . *En exercice* □

Théorème 2.1.15

Soit $(E,\mathcal{T})$ un evt.
1. $\forall V \in \mathcal{V}_E(0)$, V est absorbant.
2. $\forall V \in \mathcal{V}_E(0)$, $\forall t \in \mathbb{K}$, $\exists W \in \mathcal{V}_E(0)$ tel que V est un ouvert équilibré et $W + tW \subset V$ ($t = 1$ est le cas le plus important).

Preuve . *1. Soit $x \in E$, on a ϕ est continue en $(0,x)$ donc il existe $r > 0$ et $W \in \mathcal{V}_E(x)$ tels que $rDW = \phi(rD \times W) \subset V$, en particulier $\forall s \geqslant \frac{1}{r}$, $\{x\} \subset sV$.*
2. On a ψ est continue en $(0,0)$ donc il existe U,U' deux voisinages de 0 dans E tels que $U + U' = \psi(U,U') \subset V$. D'autres part la continuité de ϕ en $(0,0)$ assure l'existence d'un ouvert θ de E contenant 0 et de $r > 0$ tels que $rD\theta = \phi(rD \times \theta) \subset U \cap U'$. Posons
$$\begin{cases} rD\theta & \text{si } t = 0 \\ (rD\theta) \cap \left(\frac{r}{t}D\theta\right) & \text{sinon.} \end{cases}$$
On trouve que W est un ouvert équilibré contenant 0 et $W + tW \subset V$. □

Par récurrence on a le corollaire suivant

Corollaire 2.1.16

Pour tout voisinage V de 0, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un ouvert équilibré θ contenant 0 tel que
$$\underbrace{\theta + \cdots + \theta}_{n \text{ fois}} \subset V.$$

Proposition 2.1.17

Dans un evt $(E,\mathcal{T})$, 0 admet une base de voisinages fermés équilibrés.

Preuve . *Soit $\theta \in \mathcal{V}_E(0)$. D'après le théorème 2.1.15 il existe un ouvert équilibré $W \in \mathcal{V}_E(0)$ tel que $W + W \subset \theta$ donc*
$$\overline{W} = \cap_{V \in \mathcal{V}_E(0)} (W+V) \subset W + W \subset \theta.$$
Il reste à montrer que $\overline{W}$ est équilibré, en exercice et voir le TD. □

Exercice 2.1.18 (Voir TD)

1. A équilibré $\implies$ $\overline{A}$ et $co(A)$ sont équilibrés.
2. A équilibré et $A \in \mathcal{V}_E(0)$ $\implies$ $\overset{\circ}{A}$ est équilibré.
3. A convexe $\implies$ $\overline{A}$ et $\overset{\circ}{A}$ sont convexe.

Définition 2.1.19

Soit $(E,\mathcal{T})$ un evt et $A \subset E$.
✓ A est bornée si et seulement si $\forall V \in \mathcal{V}_E(0)$, $\exists t > 0$, $tA \subset V$.
✓ A est totalement bornée (ou pré-compacte) si et seulement si $\forall V \in \mathcal{V}_E(0)$, $\exists B_V \subset E$ tel que B_V finie et $A \subset B + V$.

Exercice 2.1.20 (Voir TD)

1. A est bornée et $B \subset A \implies \overline{A}$ et B sont bornées.
2. A est pré-compacte et $B \subset A \implies \overline{A}$ et B sont pré-compactes.
3. A est compacte $\implies A$ est pré-compacte $\implies A$ est bornée.
4. A est un sous espace vectoriel de $E \implies \overline{A}$ est un sous espace vectoriel de E.
5. Si A est un sous espace vectoriel de E tel que $\overset{\circ}{A} \neq$ alors $A = E$.

2.1.4 Applications linéaires continues

Proposition 2.1.21

Soit E et F deux evt et $f : E \to F$ une application linéaire. On a

$$f \text{ est continue sur } E \iff f \text{ est continue en } 0.$$

Preuve .
$\implies$) *triviale.*
$\impliedby$) *Soit $x \in E$ et $V \in \mathcal{V}_F(f(x))$ donc il existe un voisinage W de 0 dans F (evt) tel que $V = f(x) + W$ d'où $f^{-1}(V) = x + f^1(W) \in \mathcal{V}_E(x)$, puisque f est continue en 0 et donc $f^1(W) \in \mathcal{V}_E(0)$.* □

Remarque 2.1.22. *Soit E et F deux evt et $f : E \to F$ une application linéaire continue. On a*
i) Si F est séparé alors le noyau de f $Ker(f) \overset{def}{=} f^{-1}(\{0\})$ est fermé dans E.
ii) Si B est une partie bornée (resp. pré-compacte) de E alors $f(A)$ est bornée (resp. pré-compacte) dans F.

Théorème 2.1.23

Soit E un evt et Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une application telle que $\forall x,y \in E$, $\forall t > 0$

$$i) \quad f(x+y) \leqslant f(x) + f(y) \qquad \text{et} \qquad ii) \quad f(tx) = tf(x).$$

Alors

1) f est continue $\iff$ 2) $(f < 1)$ est un ouvert $\iff$ 3) $(f < 1) \in \mathcal{V}_E(0) \iff$ 4) $(f \leqslant 1) \in \mathcal{V}_E(0)$
$\iff$ 5) f continue en 0
$\iff$ 6) il existe $q : E \to \mathbb{R}$ une application continue en 0 telle que $f \leqslant q$ sur un voisinage U de 0.

Preuve . *On remarque d'abord, $f(0) = f(2 \times 0) = 2f(0)$ donc $f(0) = 0$, $f(y) - f(x) = f(x + (y-x)) - f(x) \leqslant f(y-x)$ et $0 = f(x-x) \leqslant f(x) + f(-x)$ donc $-f(x) \leqslant f(-x)$.*
On a 1) $\implies$ 2) $\implies$ 3) $\implies$ 4) et 1) $\implies$ 6) sont triviales.
4) $\implies$ 5) : Soit $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(0)$ donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]-\varepsilon,\varepsilon[\subset V$. On a $\varepsilon(f \leqslant 1) = (f \leqslant \varepsilon) \in \mathcal{V}_E(0)$, soit $W \in \mathcal{V}_E(0)$ équilibré tel que $W \subset (f \leqslant \varepsilon)$ et pour tout $x \in W$, on a $-x \in W$ donc $f(x) \leqslant \varepsilon$ et $f(-x) \leqslant \varepsilon$. Mais $0 = f(x-x) \leqslant f(x) + f(-x)$, d'où $-f(x) \leqslant \varepsilon$. Ainsi $f(x) \in]-\varepsilon,\varepsilon[\subset V$. Donc f est continue en 0.

5) $\implies$ 1) : *Soit $x \in E$ et montrons que f est continue en x. Pour cela, soit $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(f(x))$ donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f(x)+\varepsilon]-1,1[=]f(x)-\varepsilon,f(x)+\varepsilon[\subset V$. Or f est continue en 0 donc il existe $W \in \mathcal{V}_E(0)$ équilibré tel que $W \subset f^{-1}(]-\varepsilon,\varepsilon[)$. Donc $x+W \in \mathcal{V}_E(x)$ et pour tout $y \in x+W$, on a $y-x \in W$ et $x-y \in W$ d'où $f(y-x) < \varepsilon$* et *$f(x-y) < \varepsilon$. Mais*

$$|f(y)-f(x)| \leqslant f(y-x) \vee f(x-y) < \varepsilon,$$

Ainsi $f(y) \in V$.
6) $\implies$ 1) : *D'après l'équivalence de 1) et 5), il suffit de montrer que f est continue en 0. Soit $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{R}}(0)$ donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]-\varepsilon,\varepsilon[\subset V$. Par suite il existe $W \in \mathcal{V}_E(0)$ équilibré tel que $W \subset U \cap q^{-1}(]-\varepsilon,\varepsilon[)$.*
Soit $x \in W$, donc $-x \in W$, $f(x) \leqslant q(x) < \varepsilon$ et $-f(x) \leqslant f(-x) \leqslant q(-x) < \varepsilon$. Ainsi $f(x) \in]-\varepsilon,\varepsilon[\subset V$.CQFD ☐

Théorème 2.1.24

Soit $(E,\mathcal{T})$ un evt **séparé** de dimension n sur le corps $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$ (et non $\mathbb{Q}$). Soit $(e_1,\cdot\cdot,e_n)$ une base (algébrique) de E. Alors l'application

$$\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{K}^n & \longrightarrow & E \\ & (t_1,\cdot\cdot,t_n) & \longmapsto & \sum_{i=1}^n t_i e_i \end{array}$$

est un isomorphisme topologique (une application linéaire qui est une homéomorphisme). En particulier $(E,\mathcal{T})$ est normable.

Remarque 2.1.25. *Si on ne dit pas le contraire $\mathbb{K}^n$ sera toujours muni de la norme $\|(t_1,\cdot\cdot,t_n)\| = \max\{|t_1|,\cdot\cdot,|t_n|\}$.*

Preuve . *On a h est linéaire bijective c-à-d isomorphisme algébrique (car $(e_1,\cdot\cdot,e_n)$ une base de E). Il reste à montrer que h et h^{-1} sont continues en $0=0_{\mathbb{K}^n}$ et $0=0_E$ respectivement.*
✓ *Soit $V \in \mathcal{V}_E(0)$. Montrons que $h^{-1}(V) \in \mathcal{V}_{\mathbb{K}^n}(0)$:*
Soit $W \in \mathcal{V}_E(0)$ tel que W est un ouvert équilibré et $\underbrace{W+\cdot\cdot+W}_{n\ fois} \subset V$.

D'autres part, les fonctions $\alpha_i : \mathbb{K} \to E,\ t \mapsto te_i$ sont continues pour $i=1\cdot\cdot n$ car $\alpha_i = \phi \circ \beta_i$ avec $\beta_i : \mathbb{K} \to \mathbb{K}\times E,\ t \mapsto (t,e_i)$, ϕ est continue (E est un evt) et β_i est continue (topologie ***produit*** *sur l'ensemble d'arrivé et les fonctions coordonnées sont continues : l'identité et une fonction constante).*
En déduit que $U = \bigcap_{i=1}^n \alpha_i^{-1}(W) \in \mathcal{V}_{\mathbb{K}}(0)$ et $U^n = \underbrace{U\times\cdot\cdot\times U}_{n\ fois} \subset h^{-1}(V)$. D'où la continuité de h.

✓ *Soit $V \in \mathcal{V}_{\mathbb{K}^n}(0)$. Montrons que $h(V) \in \mathcal{V}_E(0)$:*
Soit $r > 0$ tel que $B_r = \{t \in \mathbb{K}^n\ ;\ \|t\| < r\} = rB_1 \subset V$, il suffit donc de montrer que $h(B_1) \in \mathcal{V}_E(0)$.
On a $S = \{t \in \mathbb{K}^n\ ;\ \|t\| = 1\}$ est une partie compacte de $\mathbb{K}^n$ car $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ ou *$\mathbb{R}$ (le cas $\mathbb{K}=\mathbb{Q}$ ne marche pas!) et puisque h est continue et E est* ***séparé****, on obtient $h(S)$ est compact et en particulier $h(S)$ est fermé dans E, de plus $h(0)=0$ donc $0 \in U \overset{def}{=} E \setminus h(S)$ qui est un ouvert de E. Soit donc W un ouvert équilibré tel que*

$$0 \in W \subset U.$$

Soit $x \notin h(B_1)$ donc $\|h^{-1}(x)\| \geqslant 1$ ainsi $\frac{1}{\|h^{-1}(x)\|} h^{-1}(x) \in S$ ce qui donne

$$h(\frac{1}{\|h^{-1}(x)\|} h^{-1}(x)) = \frac{1}{\|h^{-1}(x)\|} x \in h(S)$$

donc $\frac{1}{\|h^{-1}(x)\|} x \notin W$ et puisque W est équilibré et $\frac{1}{\|h^{-1}(x)\|} \leqslant 1$ on a $x \notin W$. Ainsi $W \subset h(B_1)$ ce qui prouve que $h(B_1) \in \mathcal{V}_E(0)$. CQFD
La topologie $\mathcal{T}$ est engendrée par la norme $\|x\|_E = \|h^{-1}(x)\|_{\mathbb{K}^n}$. ☐

Corollaire 2.1.26

Soit E un evt **séparé** sur le corps $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$, soit F un sous espace vectoriel de E de dimension finies. Alors F est fermé de E (ici $\mathbb{K}=\mathbb{Q}$ ne marche pas!).

Preuve . *Soit $(e_1, \cdots, e_n)$ une base de F et supposons que F n'est pas fermé. Donc il existe $e_{n+1} \in \overline{F}$ tel que $e_{n+1} \notin F$. Posons $G = Vect_{\mathbb{K}}(\{e_1, \cdots, e_n, e_{n+1}\})$, on a*

$$F \subsetneq G \subset \overline{F} \quad \text{et} \quad (e_1, \cdots, e_n, e_{n+1}) \text{ est une base de } G.$$

D'après le théorème 2.1.24, la fonction

$$h: \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^{n+1} & \longrightarrow & G \\ (t_1, \cdots, t_{n+1}) & \longmapsto & \sum_{i=1}^{n+1} t_i e_i \end{array}$$

est un isomorphisme topologique.
Puisque $\mathbb{K}^n \times \{0\}$ est un fermé de $\mathbb{K}^{n+1}$ alors $F = h(\mathbb{K}^n \times \{0\})$ est un fermé de G. D'où

$$F = \overline{F}^G = \overline{F} \cap G = \overline{F}.$$

Ce qui est absurde, ainsi F est fermé. □

Lemme 2.1.27
Soit E un evt et A une partie de E. Soit B une partie bornée de E telle que

$$\exists t \in \mathbb{K} \quad \text{tel que} \quad B \subset A + tB \quad \text{et} \quad |t| < 1.$$

Alors $B \subset \overline{Vect_{\mathbb{K}}(A)}$.

Preuve . *Posons $M = Vect_{\mathbb{K}}(A)$ et rappelons que $\overline{M} = \bigcap_{V \in \mathcal{V}_E(0)} (M + V)$.*
Soit $V \in \mathcal{V}_E(0)$ donc il existe W un ouvert équilibré tel que $0 \in W \subset W + W \subset V$. Puisque B est bornée, il existe $\alpha > 0$ tel que $\alpha B \subset W$. Or il existe un entier n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0$, on a $|t^n| = |t^n| < \alpha$ (car $|t| < 1$).
D'autre part, on montre par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$B \subset M + t^n B.$$

En effet, l'inclusion est vraie pour $n = 1$ (par hypothèse et $A \subset M$). Supposons que l'inclusion est vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$. Donc

$$\begin{aligned} x \in B &\Longrightarrow x \in M + t^n B \\ &\Longrightarrow \exists m \in M,\ \exists b \in B,\ x = m + t^n b \\ &\Longrightarrow \exists m, m' \in M,\ \exists b' \in B,\ x = m + t^n m' + t^{n+1} b' \qquad \text{car } B \subset M + tB \\ &\Longrightarrow x \in M + t^{n+1} B. \end{aligned}$$

En particulier, $B \subset M + t^{n_0} B \subset M + \frac{t^{n_0}}{\alpha} \alpha B \subset M + \frac{t^{n_0}}{\alpha} W$. Puisque W est équilibrée et $\frac{t^{n_0}}{\alpha} \leqslant 1$, on trouve

$$B \subset M + W \subset B + V.$$

Donc

$$B \subset \bigcap_{V \in \mathcal{V}_E(0)} (M + V) = \overline{M}.$$

□

Théorème 2.1.28
Soit E un evt **séparé**.

$$E \text{ est de dimension finie} \Longleftrightarrow 0 \text{ admet un voisinage pré-compact.}$$

Preuve .
✓ ($\Longrightarrow$) : *Si* $dim_{\mathbb{K}}(E) = n$ *alors il existe* $(e_1, \cdot, \cdot, e_n)$ *une base de* E. *Considérons l'isomorphisme topologique* h *définie dans le théorème 2.1.24 et le compact* $B_1 = \{z \in \mathbb{K}^n \ ; \ \|z\| \leqslant 1\}$ *de* $\mathbb{K}^n$, *on a* $W = h(B_1)$ *est compact (car* h *continue et* E *séparé) donc pré-compact qui contient le voisinage de* 0, $h(\{z \in \mathbb{K}^n \ ; \ \|z\| \leqslant 1\})$ *(c'est un ouvert contenant* 0*). Ainsi* W *est un voisinage de* 0 *pré-compact.*
✓ ($\Longleftarrow$) : *Soit* K *un voisinage pré-compact de* 0. *Soit* A *une partie finie de* E *telle que*

$$K \subset A + \frac{1}{2} K.$$

D'après le lemme 2.1.27, on a

$$K \subset \overline{M}$$

où $M = Vect_{\mathbb{K}}(A)$. *Or* M *est de dimension finie donc, d'après la proposition 2.1.26,* $M = \overline{M}$ *(puisque* E *est séparé). D'autre part,*

$$\begin{aligned} x \in E &\Longrightarrow \exists t > 0,\ tx \in K \subset M \qquad \text{car } K \text{ est absorbant puisque tout voisinage de } 0 \text{ est absorbant} \\ &\Longrightarrow x \in M \qquad \text{car } M \text{ est un sous espace vectoriel.} \end{aligned}$$

Donc $E \subset M$, *ainsi* E *est de dimension finie.* □

Définition 2.1.29

On dit qu'un evt séparé est localement compact si l'origine admet un voisinage compact.

Proposition 2.1.30

Si E est un evt localement compact alors 0 admet une base de voisinage compacts dénombrable.

Lemme 2.1.31

Soit E un evt et V un voisinage **borné** de 0. Alors $\mathcal{B}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{\frac{1}{n} V \ ; \ n \in \mathbb{N}^*\}$ est une base de voisinage de 0.

Preuve . *Il suffit d'appliquer le lemme suivant.* □

Preuve . *Soit* $U \in \mathcal{V}_E(0)$ *donc il existe un ouvert équilibré* W *tel que* $0 \in W \subset U$. *Or* V *est borné donc il existe* $t > 0$ *tel que* $tV \subset W$, *soit* $n \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $\frac{1}{n} < t$, *donc*

$$\frac{1}{n} V \subset \frac{1}{tn} tV \subset \frac{1}{tn} W \subset W \subset U.$$

□

Corollaire 2.1.32

Soit E un evt **séparé**.

$$E \text{ est de dimension finie} \iff E \text{ est localement compact.}$$

2.2 EVT localement convexe

Définition 2.2.1

On dit qu'un evt E est localement convexe, on écrit evtlc, si 0 admet une base de voisinages convexes, c'est à dire

$$\forall V \in \mathcal{V}_E(0),\ \exists W \in \mathcal{V}_E(0), \quad W \subset V \quad \text{et} \quad W \text{ est convexe.}$$

Proposition 2.2.2

Soit E un evtlc. Alors 0 admet une base de voisinages convexes fermés et équilibrés.

Preuve . *Soit $V \in \mathcal{V}_E(0)$, donc $\exists W_1 \in \mathcal{V}_E(0)$ tel que W_1 est équilibré est $W_1 \subset W_1 + W_1 \subset V$. Or E est localement convexe donc $\exists W_2 \in \mathcal{V}_E(0)$ tel que W_2 est convexe et $W_2 \subset W_1$. Il existe aussi u voisinages équilibré de 0 tel que $W_3 + W_3 \subset W_2$. Posons $U = \overline{co(W_3)}$, on a $W_3 \subset W$ donc W est un voisinage fermé convexe de 0. D'autre part,*

$$W_3 \subset W_2 \implies co(W3) \subset co(W_2) = W2 \implies U = \overline{co(W_3)} \subset \overline{W_2} \subset \overline{W_1} \subset W_1 + W_1 \subset V.$$

□

Définition 2.2.3

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (à présent on n'a pas de topologies sur E). Soit $\mathcal{P} = \{p_i \ ; \ i \in I\}$ une famille de semi normes sur E.
1. On dit que la famille $\mathcal{P}$ est séparante si $\forall x \in E \setminus \{0\}$, $\exists p \in \mathcal{P}$, tel que $p(x)_neq0$.
2. On dit que $\mathcal{P}$ est filtrante si $\forall p,p' \in \mathcal{P}$, $\exists q \in \mathcal{P}$, tel que $p \leqslant q$ et $p' \leqslant q$.

Remarque 2.2.4. *Soit $\mathcal{P}$ est une famille de semi normes sur E. Posons $\mathcal{J}_{\mathcal{P}} = \{J \subset \mathcal{P} \ \text{ tel que } \ J \text{ est finie}\}$ et pour $J \in \mathcal{J}$, $q_J : E \to [0,+\infty[$ définie par $x \mapsto \max_{p\in J} p(x)$. Alors $\widehat{\mathcal{P}} = \{q_J \ ; \ J \in \mathcal{J}\}$ est une famille filtrante sur E, séparante si $\mathcal{P}$ l'est.*

Notation 2.2.5. *Soit p une semi norme sur E, on note B_p l'ensemble $\{x \in E \ | \ p(x) < 1\}$ (la boule ouverte unité associée à la semi norme p).*

Proposition 2.2.6 (et définition)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathcal{P}$ une famille de semi normes sur E. Posons

$$\mathcal{T}_E(\mathcal{P}) \overset{\text{def}}{=} \left\{ U \subset E \ | \ \forall x \in U, \exists n \in \mathbb{N}^*, \exists J \in \mathcal{J}_{\mathcal{P}}, \qquad x + \frac{1}{n} \bigcap_{p\in J} B_p = x + \frac{1}{n} B_{q_J} \subset U \right\}.$$

Alors $(E,\mathcal{T}_E(\mathcal{P}))$ est un evtlc. Une base de voisinages de 0 pour cette topologie est donnée par

$$\mathcal{B}_E(0) = \left\{ \frac{1}{n} \bigcap_{p\in J} B_p \ ; \ n \in \mathbb{N}^* \text{ et } J \in \mathcal{J}_{\mathcal{P}} \right\}.$$

Cette topologie est séparé si $\mathcal{P}$ est séparante.
Définition : $\mathcal{T}_E(\mathcal{P})$) est dite la topologie sur E associée à la famille des semi normes $\mathcal{P}$ sur E.

Preuve . *Facile, il suffit pour établir que $\mathcal{T}_E(\mathcal{P})$) est une topologie sue E d'utiliser la même démonstration que celle du même résultat pour les espaces métriques ou normés (voir cours topologie). En suite il faut montrer la continuité de l'addition et de la multiplication externe...* □

Remarque 2.2.7.

$$\mathcal{T}_E(\mathcal{P}) = \mathcal{T}_E(\widehat{\mathcal{P}}) \qquad \textit{puisque} \bigcap_{p \in J} B_p = B_{q_J}.$$

Proposition 2.2.8

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $\mathcal{P}$ une famille de semi normes sur E et $B \subset E$. Alors B est bornée pour la topologie $\mathcal{T}_E(\mathcal{P})$ si et seulement si $\forall p \in \mathcal{P},\ \exists M_p \in \mathbb{R},\ \forall x \in B,\ \ p(x) \leqslant M_p$.

Preuve . *En exercice.* □

Théorème 2.2.9

Soit $(E,\mathcal{T})$ un evt.

E est localement convexe si et seulement si $\exists\, \mathcal{P}$ une famille de semi normes sur E tq $\mathcal{T} = \mathcal{T}_E(\mathcal{P})$.

Preuve .
$(\Longrightarrow)$: *D'après la proposition 2.2.6.*
$(\Longleftarrow)$: *Soit $\mathcal{V} = \{V \in \mathcal{V}_E(0)\ |\ V$ est convexe, fermé et équilibré$\}$. On sait que pour tout voisinage U de 0 il existe un élément V de $\mathcal{V}$ tel que $V \subset U$.*
Pour $V \in \mathcal{V}$, soit p_V la jauge de V. On sait que p_V est une semi norme sur E et $V = \{x \in E\ ;\ p_V(x) \leqslant 1\} = (p_V \leqslant 1)$ (voir TD). Considérons maintenant la famille de semi normes $\mathcal{P} = \{p_V\ \ ;\ \ V \in \mathcal{V}\}$ et montrons que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_E(\mathcal{P})$.
✓ *Soit $U \in \mathcal{T}$. Soit $x \in U$ donc $\exists V \in \mathcal{V}$, $x + V \subset U$ d'où $x + B_{p_V} \subset x + V \subset U$, ainsi $U \in \mathcal{T}_E(\mathcal{P})$. On a montrer que*

$$\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_E(\mathcal{P}).$$

✓ *Réciproquement, soit $U \in \mathcal{T}_E(\mathcal{P})$. Soit $x \in U$, donc il existe $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $d \in \mathbb{N}^*$ et il existe $V_1, \cdots, V_d \in \mathcal{V}$ tels que*

$$x + \frac{1}{n} \bigcap_{i=1 \cdot\cdot n} B_{p_{V_i}} \subset U,$$

or $B_{p_{V_i}} \subset \frac{1}{2} V_i$, donc $x + \frac{1}{2n} \bigcap_{i=1\cdot\cdot n} V_i \subset U$. Mais $x + \frac{1}{2n} \bigcap_{i=1\cdot\cdot n} V_i \in \mathcal{V}_E(x)$ donc il existe $\theta_x \in \mathcal{T}$ tel que $x \in \theta_x \subset U$, d'où

$$U = \bigcup_{x \in U} \theta_x \in \mathcal{T}.$$

Ainsi

$$\mathcal{T}_E(\mathcal{P}) \subset \mathcal{T}.$$

□

Exemple 2.2.10

Soit A un ensemble non vide et F un espace vectoriel normé. Posons $E = F^A$ l'espace vectoriel des applications de A dans F. Considérons la famille des semi normes

$$\mathcal{P} = \{p_a\ \ ;\ \ a \in A\}$$

où p_a est définie par $p_a(x) = \|x(a)\|_F$.

La topologie $\mathcal{T}_E(\mathcal{P})$ sur E est la topologie de la convergence simple. $E = F^A$ muni de cette topologie est un evtlc séparé (en exo).

Exemple 2.2.11

Soit $E = \mathcal{C}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ muni de la famille des semi normes $\mathcal{P} = \{p_n \;\; ; \;\; n \in \mathbb{N}^*\}$ avec

$$p_n(x) = \sup_{t\in[-n,n]} |x(t)|.$$

La topologie associée à $\mathcal{P}$ est dite la topologie de la convergence compacte. E muni de cette topologie est un evtlc métrisable (voir plus loin) et donc séparé.

Exemple 2.2.12

Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ muni de la famille $\mathcal{P} = \{p_{n,k} \;\; ; \;\; n,k \in \mathbb{N}\}$ où

$$p_{n,k}(f) \overset{\text{def}}{=} \sup_{i=0\cdots n} \left(\sup_{t\in[-k,k]} |f^{(i)}(t)| \right).$$

E muni de la topologie associée à $\mathcal{P}$ est un evtlc métrisable (voir plus loin) et donc séparé aussi.

Exemple 2.2.13

Soit $E = \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}) = \mathcal{D}(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact muni de la famille $\mathcal{P} = \{p_n \;\; ; \;\; n \in \mathbb{N}\}$ où

$$p_n(f) \overset{\text{def}}{=} \sup_{i=0\cdots n} \sup_{t\in\mathbb{R}} |f^{(i)}(t)|.$$

$\mathcal{D}(\mathbb{R})$ muni de la topologie associée à $\mathcal{P}$ est un evtlc métrisable (voir plus loin) et donc séparé aussi.

Théorème 2.2.14

Soit E un espace vectoriel muni d'une famille de semi normes $\mathcal{P}$ et F un autre espace vectoriel muni d'une famille de semi norme $\mathcal{Q}$. Soit $T : E \to F$ une application linéaire. Alors

i) T est continue pour les topologies $\mathcal{T}_E = \mathcal{T}_E(\mathcal{P})$ et $\mathcal{T}_F = \mathcal{T}_F(\mathcal{Q})$ $\iff$ *iii)* $\forall q \in \mathcal{Q}, \;\; \exists J_q \in \mathcal{J}_\mathcal{P}, \;\; \exists m_q \in \mathbb{N}^*, \qquad T\left(\bigcap_{p\in J_q} B_p\right) \subset m_q B_q$

$\iff$ *ii)* $\forall q \in \mathcal{Q}, \;\; \exists J_q \in \mathcal{J}_\mathcal{P}, \;\; \exists C_q > 0, \;\; \forall x \in E, \;\; q(T(x)) \leqslant C_q \sup_{p\in J_q} p(x)$.

Preuve .

$i) \Longrightarrow ii)$: Soit $q \in \mathcal{Q}$, on a $B_q = (q < 1) \in \mathcal{V}_F(0)$ et la continuité de T en 0 implique que $T^{-1}(B_q) \in \mathcal{V}_E(0)$ donc il existe $n_q \in \mathbb{N}^*$ et il existe $J_q \in \mathcal{J}_\mathcal{P}$ tels que $\frac{1}{n_q} \bigcap_{p\in J_q} B_p \subset T^{-1}(B_q) \in \mathcal{V}_E(0)$ ainsi

$$T\left(\bigcap_{p\in J_q} B_p\right) \subset n_q B_q.$$

$ii) \Longrightarrow iii)$: Soit $x \in E$, soit $\varepsilon > 0$ donc $y \overset{def}{=} \frac{1}{\sup_{p\in J_q} p(x)+\varepsilon} x \in \bigcap_{p\in J_q} B_p$ d'où $T(y) \in m_q B_q$ et par conséquent

$$q(T(x)) \leqslant m_q \left(\sup_{p\in J_q} p(x) + \varepsilon \right),$$

tendons en suite ε vers 0^+, pour obtenir $q(T(x)) \leqslant m_q \sup_{p\in J_q} p(x)$.

$iii) \Longrightarrow i)$: D'après la proposition 2.1.21, il suffit de montrer que T est continue en 0. Pour cela soit $V \in \mathcal{V}_F(T(0)=0)$, donc il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et il existe $I \in \mathcal{J}_\mathcal{Q}$ tels que $\frac{1}{n}\bigcap_{q\in I} B_q \subset V$. Posons $r = \underbrace{\left[\max_{q\in I} C_q\right]}_{\text{partie entière}} + 1$ et $J = \bigcap_{q\in I} J_q$.

Posons $U = \frac{1}{nr}\bigcap_{p\in J} B_p$, on a $U \in \mathcal{V}_E(0)$ (J est finie) et si $x \in U$, alors pour tout $q \in I$,

$$q(T(x)) \leqslant C_q \sup_{p\in J_q} p(x) < \frac{C_q}{nr} \leqslant \frac{1}{n}$$

donc $T(x) \in \frac{1}{n}\bigcap_{q\in I} B_q \subset V$. D'où $U \subset T^{-1}(V)$ c-à-d T est continue. □

Remarque 2.2.15. *Si de plus $\mathcal{P}$ est filtrante alors*

$$\begin{aligned} i)\ T \text{ est continue pour les topologies } \mathcal{T}_E = \mathcal{T}_E(\mathcal{P}) \text{ et } \mathcal{T}_F = \mathcal{T}_F(\mathcal{Q}) &\iff iii)\ \forall q \in \mathcal{Q},\ \exists p_q \in \mathcal{P},\ \exists m_q \in \mathbb{N}^*, \quad T\left(B_{p_q}\right) \subset m_q B_q \\ &\iff ii)\ \forall q \in \mathcal{Q},\ \exists p_q \in \mathcal{P},\ \exists C_q > 0,\ \forall x \in E, \quad q(T(x)) \leqslant C_q\, p_q(x). \end{aligned}$$

Théorème 2.2.16

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\mathcal{P}$ une famille de semi normes sur E. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une application telle que $\forall x,y \in E$, $\forall t > 0$

$$i) \quad f(x+y) \leqslant f(x) + f(y) \qquad \text{et} \qquad f(tx) = tf(x).$$

Alors

$$f \text{ est continue avec } E \text{ muni de la topologie } \mathcal{T}_E = \mathcal{T}_E(\mathcal{P}) \iff \exists J \in \mathcal{J}_\mathcal{P},\ \exists C > 0,\ \forall x \in E, \quad f(x) \leqslant C \sup_{p\in J} p(x).$$

Preuve (On peut aussi utiliser le théorème 2.1.23).
($\Longrightarrow$) : *Supposons que f est continue donc elle est continue en 0 donc $f^{-1}(]-1,1[) \in \mathcal{V}_E(0)$. Donc il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et il existe $J \in \mathcal{J}_\mathcal{P}$ tels que*

$$\frac{1}{n}\bigcap_{p\in J} B_p \subset f^{-1}(]-1,1[).$$

Soit $x \in E$ et $\varepsilon > 0$ donc $y = \frac{1}{n(\varepsilon + \sup_J p(x))} x \in \frac{1}{n}\bigcap_{p\in J} B_p \subset f^{-1}(]-1,1[)$. d'où

$$f(y) = \frac{1}{n(\varepsilon + \sup_J p(x))} |f(x)| < 1.$$

Ainsi, en tendant $\varepsilon \to 0^+$, nous obtenons $f(x) \leqslant |f(x)| \leqslant C \sup_{p\in J} p(x)$ avec $C = n$.
($\Longleftarrow$) : *Soit $x \in E$ et montrons que f est continue en x. Pour cela, soit $V \in \mathcal{V}_\mathbb{R}(f(x))$ donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f(x) + \varepsilon]-1,1[=]f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon[\subset V$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{C}{n} < \varepsilon$ et posons $W = x + \frac{1}{n}\bigcap_{p\in J} B_p$. On a $W \in \mathcal{V}_E(x)$ et pour tout $y \in W$,*

$$f(y) - f(x) \leqslant f(y-x) \leqslant C \sup_{p\in J} p(y-x) \leqslant \frac{C}{n} < \varepsilon,$$

de même

$$f(x) - f(y) \leqslant f(x-y) \leqslant C \sup_{p\in J} p(x-y) = C \sup_{p\in J} p(y-x) \leqslant \frac{C}{n} < \varepsilon.$$

Ainsi $f(W) \subset f(x) + \varepsilon]-1,1[\subset$. D'où la continuité de f en x. □

Définition 2.2.17

Soit $(I, \leqslant)$ un ensemble ordonné, on dit que $(I, \leqslant)$est dirigé si $\forall i,j \in I$, $\exists k \in I$ tels que $i \leqslant k$ et $j \leqslant k$.

Exemple 2.2.18

✓ $(\mathbb{N}, \leqslant)$ est dirigé.
✓ L'ensemble des voisinages de x muni de l'inclusion est dirigé.

Définition 2.2.19

Soit $(I, \leqslant)$ un ensemble dirigé et E un espace topologique.
1. Une suite généralisée (famille, net) $(x_i)_{i\in I}$ à valeurs dans E est une application de I dans E : $I \to E,\ i \mapsto x_i$.
2. On dit que la suite généralisée $(x_i)_{i\in I}$ à valeurs dans E converge vers $x \in E$ si

$$\forall V \in \mathcal{V}_E(x),\ \exists i_0 \in I,\ \ \forall i \in I,\ i_0 \leqslant i \implies x_i \in V.$$

On écrit dans ce cas $(x_i)_{i\in I} \to x$ dans E ou $\lim\limits_{i\in I}(x_i)_{i\in I} = x$ dans E.

Théorème 2.2.20

Soit E un evt, $(x_i)_{i\in I}$ une suite généralisée à valeurs dans E et $x \in E$.
1. $(x_i)_{i\in I} \to x$ dans E si et seulement si $\forall V \in \mathcal{V}_E(0),\ \exists i_0 \in I,\ \ \forall i \in I,\ i_0 \leqslant i \implies x_i - x \in V$ (c-à-d $(x_i - x)_{i\in I} \to 0$).
2. Si la topologie sue E est définie par une famille de semi normes $\mathcal{P}$ alors $(x_i)_{i\in I} \to x$ dans E si et seulement si $\forall p \in \mathcal{P},\ (p(x_i - x))_{i\in I} \to 0$ dans $\mathbb{R}$ (on revient à $\mathbb{R}$!).

Preuve . *En exercice.* □

Proposition 2.2.21

Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux familles de semi normes sur E. Alors

$$\mathcal{T}_E(\mathcal{P}) \subset \mathcal{T}_E(\mathcal{Q}) \iff \forall p \in \mathcal{P},\ p \text{ est continue pour } \mathcal{T}_E(\mathcal{Q}).$$

Preuve . *Il suffit d'étudier la continuité de l'application linéaire* $f = id_E : (E,\mathcal{T}_E(\mathcal{P})) \to (E,\mathcal{T}_E(\mathcal{Q})),\ x \mapsto x$... □

2.3 Espaces de Fréchet

Définition 2.3.1

Soit $(E,\mathcal{T})$ un espace topologique. On dit qu'il est métrisable s'il existe une distance d sur E telle que

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_d = \{U \subset E \mid \forall x \in U,\ \exists r > 0,\ B_d(x,r) \subset U\}.$$

Où $B_d(x,r) = \{y \in E \mid d(y,x) < r\}$.

Remarque 2.3.2. *Si* $(E,\mathcal{T})$ *est un evt métrisable par une distance* d *sur* E*, alors elle est séparé et* 0 *admet une base de voisinages dénombrable :* $\left\{B_d(0,\frac{1}{n})\ ;\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

Théorème 2.3.3

$(E,\mathcal{T})$ est un evt **séparé**.

$$(E,\mathcal{T}) \text{ est métrisable} \iff 0 \text{ admet une base de voisinages dénombrable.}$$

Preuve .
$\Longrightarrow$) : *Triviale d'après la remarque précédente.*
$\Longleftarrow$) : *Admis (Mais pour les courageux voir le polycopié des exercices corrigés).* □

Théorème 2.3.4

Soit $(E,\mathcal{T})$ un evtlc séparé. Alors

$(E,\mathcal{T})$ est métrisable $\iff$ il existe une suite de semi normes $\mathcal{P} = \{p_n \ ; \ n \in \mathbb{N}^*\}$ telle que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_E(\mathcal{P})$.

Dans ce cas on peut choisir une distance invariante par translation.

Preuve .
Rappelons que $\mathcal{V} = \{V \in \mathcal{V}_E(0) \,|\, V$ est équilibré, convexe et fermé$\}$ est une base de voisinage de 0 et notons p_V la jauge de V. On sait que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_E(\mathcal{Q})$, où $\mathcal{Q} = \{p_V \ ; \ V \in \mathcal{V}\}$.
$\Longrightarrow$) :
Soit d une distance dans E telle que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_E(\mathcal{Q}) = \mathcal{T}_d$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $W_n \in \mathcal{V}$ tel que $W_n \subset B_d(0,\frac{1}{n})$. Notons

$$\mathcal{P} = \left\{p_{W_n} \ ; \ n \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

D'après la proposition 2.2.21 et puisque $\mathcal{P} \subset \mathcal{Q}$,

$$\mathcal{T}_E(\mathcal{P}) \subset \mathcal{T}_E(\mathcal{Q}) = \mathcal{T}.$$

Réciproquement, Soit $q \in \mathcal{Q}$ donc il existe $V \in \mathcal{V}$ telle que $q = p_V$. Soit $n_V \in \mathbb{N}^*$ tel que $B_d(0,\frac{1}{n_V}) \subset V$, on obtient $W_n \subset V$ et par conséquent, $p_V \leqslant p_{W_n}$ c-à-d $\exists p \in \mathcal{P}$ telle que $q \leqslant p$. D'où q est continue pour $\mathcal{T}_E(\mathcal{Q})$ ce qui donne

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_E(\mathcal{Q}) \subset \mathcal{T}_E(\mathcal{P}).$$

On conclut que

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_E(\mathcal{Q}) = \mathcal{T}_E(\mathcal{P}).$$

$\Longleftarrow$) : *Soit une suite $\mathcal{P} = \{p_n \ ; \ n \in \mathbb{N}^*\}$ de semi normes sur E telle que $\mathcal{T} = \mathcal{T}_E(\mathcal{P})$. Posons*

$$\begin{array}{rccl} d: & E \times E & \longrightarrow & [0,+\infty[\\ & (x,y) & \longmapsto & \max_{n\in\mathbb{N}} \left[\frac{1}{2^n}\left(p_n(y-x) \wedge 1\right)\right] \end{array}$$

✓ *d est une distance sur E :*
i. (symétrie) $\forall x,y \in E$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_n(y-x) = p_n(x-y)$, donc $d(x,y) = d(y,x)$
ii. (séparante) Soit $x,y \in E$ tels que $d(x,y) = 0$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_n(y-x) = 0$ et puisque $\mathcal{T}_E(\mathcal{P})$ est séparée, $\mathcal{P}$ est séparante donc $y = x$. Réciproquement, puisque $\forall n$, $p_n(0) = 0$ on a $d(x,x) = 0$.
iii. (transitivité) Soit $x,y,z \in Z$, on a pour tout entier n, $p_n(z-x) \leqslant p_n(z-y) + p_n(y-x)$ donc

$$\frac{1}{2^n}\left(p_n(z-x) \wedge 1\right) \leqslant \frac{1}{2^n}\left(p_n(z-y) \wedge 1\right) + \frac{1}{2^n}\left(p_n(y-x) \wedge 1\right) \leqslant d(z,y) + d(y,x)$$

d'où $d(z,x) \leqslant d(z,y) + d(y,x)$.
Remarquons que $d(y,x) = d(y-x,0)$ c-à-d d est invariante par translation.
✓ *$\mathcal{T}_d \subset \mathcal{T}$: Soit $U \in \mathcal{T}_d$, soit $x \in U$ donc il existe $r > 0$ tel que $B_d(x,r) \subset U$. Soit $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{m} < r$, soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{2^{n_0}} < r$ et posons $J = \{p_0, \cdots, n_0\}$.*
Soit $y \in x + \frac{1}{m}\bigcap_{i=0\cdots n} B_{p_i}$ donc $\forall i = 0 \cdots n$, $p_i(y-x) < \frac{1}{m}$, en particulier

$$\forall i = 0 \cdot\cdot n, \qquad \frac{1}{2^i}\left[p_i(y-x) \wedge 1\right] < r.$$

D'autre part, $\forall i > n$, $\frac{1}{2^i}\left[p_i(y-x)\wedge 1\right] \leqslant \frac{1}{2^i} < \frac{1}{2^{n_0}} < r$. *Ainsi* $d(y,x) < r$, *c-à-d* $y \in B_d(x,r) \subset U$.
D'où $x + \frac{1}{m}\bigcap_{i=0\cdot\cdot n} B_{p_i} \subset U$, *ce qui implique que* $U \in \mathcal{T}$.
✓ $\underline{\mathcal{T} \subset \mathcal{T}_d :}$ *Soit* $U \in \mathcal{T}$, *soit* $x \in U$ *donc il existe* $m \in \mathbb{N}^*$ *et il existe* $J = \left\{p_{n_1}, \cdots, p_{n_k}\right\} \in \mathcal{J}_{\mathcal{P}}$ *tels que* $x + \frac{1}{m}\bigcap_{i\in J} B_p \subset U$.
Posons $\alpha = \max\{n_1, \cdots, n_k\}$ *et* $r = \frac{1}{m2^\alpha}$.
Soit $y \in B_d(x,r)$, *donc* $\forall i \in \mathbb{N}$, $p_i(y-x)\wedge 1 < r2^i$, *en particulier* $\forall j \in \{n_1, \cdots, n_k\}$, $p_{n_j}(y-x)\wedge 1 < r2^{n_j} \leqslant r2^\alpha = \frac{1}{m} \leqslant 1$.
Donc $y \in x + \frac{1}{m}\bigcap_{i\in J} B_p \subset U$. *Ainsi*

$$B_d(x,r) \subset U$$

c-à-d $U \in \mathcal{T}_d$. □

Définition 2.3.5

Soit $(E,\mathcal{T})$ un evt. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E. On dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy au sens des espaces vectoriels topologiques si

$$\forall V \in \mathcal{V}_E(0),\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n,m \geqslant n_0, \qquad x_m - x_n \in V.$$

Définition 2.3.6

Un evt est dit complet au sens des evt si et seulement si Toute suite de Cauchy au sens des evt converge dans E.

Définition 2.3.7

Un espace de Fréchet est evtlc métrisable complet au sens de evt ce qui est équivalent à dire qu'il complet au sens métrique avec une distance qui engendre la topologie invariante par translation.

Exemple 2.3.8

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties compactes de $\mathbb{R}^d$ telle que

$$\bigcup_n K_n = \Omega \qquad \text{et} \qquad K_n \subset \mathring{K}_{n+1}.$$

Soit $m \in \mathbb{N}$ et

$$p_m : \mathcal{C}^k(\Omega;\mathbb{R}),\ f \mapsto p_m(f) = \sup_{|\alpha|\leqslant k}\ \sup_{x\in K_m} \|D^\alpha f(x)$$

avec pour $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d$ et $D^\alpha f(x) = \frac{\partial^\alpha}{\partial^{\alpha_1} x_1 \cdot\cdot \partial^{\alpha_d} x_d}$.
Posons

$$d(f,g) = \max_{m\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^m}\left[p_m(f-g)\wedge 1\right].$$

On a $(E,\mathcal{T}_d)$ est un espace de Fréchet.

Sommaire

Chapitre 3

Théorèmes classiques

3.1 Banach-Steinhaus

Définition 3.1.1

Soit $(E,\mathcal{T})$ un espace topologique, on dit que $A \subset E$ est maigre s'il existe une suite $(A_n)_{n\text{ß}\mathbb{N}}$ de fermé telle que

$$A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \qquad \text{et} \qquad \overset{\circ}{A}_n = \emptyset.$$

Remarque 3.1.2. *Soit $(E,\mathcal{T})$ un espace topologique.*
1. Si $(A_n)_{n\text{ß}\mathbb{N}}$ est une suite de partie maigre de $(E,\mathcal{T})$ alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est maigre dans $(E,\mathcal{T})$.
2. Si $A \subset B \subset E$ et B est maigre de E alors A est maigre.

Définition 3.1.3

Soient E et F deux espaces topologiques. Soit $(T_i)_{i\in I}$ une famille d'applications de E dans F.
✓ On dit que la famille $(T_i)_{i\in I}$ est équicontinue en $x \in E$ si

$$\forall V \in \mathcal{V}_F(f(x)), \qquad \bigcap_{i\in I} T_i^{-1}(V) \in \mathcal{V}_E(x).$$

✓ On dit que la famille $(T_i)_{i\in I}$ est équicontinue (resp. sur $A \subset E$) si elle est équicontinue en tout point $x \in E$ (resp. $x \in A$).

Proposition 3.1.4

Soient E et F deux **evt**. Soit $(T_i)_{i\in I}$ une famille d'applications **linéaires** de E dans F.
La famille $(T_i)_{i\in I}$ est équicontinue si elle est équicontinue en 0 c-à-d

$$\forall V \in \mathcal{V}_F(0), \qquad \bigcap_{i\in I} T_i^{-1}(V) \in \mathcal{V}_E(0).$$

Preuve . *Facile, semblable à la démonstration de la proposition 2.1.21.* □

Proposition 3.1.5

Soient E et F deux **evt**. Soit $(T_i)_{i\in I}$ une famille d'applications **linéaires** de E dans F équicontinue. Soit B une partie de E bornée. Alors $\bigcup_{i\in I} T_i(B)$ est bornée dans F.

Preuve . *Soit* $V \in \mathcal{V}_F(0)$. *Puisque* $(T_i)_{i\in I}$ *est équicontinue en* 0, $\bigcap_{i\in I} T_i^{-1}(V) \in \mathcal{V}_E(0)$. *Soit donc* $t>0$ *tel que* $B \subset t\bigcap_{i\in I} T_i^{-1}(V)$. *Ainsi, grâce à la linéarité des* T_i, $\forall i \in I$,

$$T_i(B) \subset tV.$$

Ce qui donne $\bigcup_{i\in I} T_i(B) \subset tV$ *c-à-d* $\bigcup_{i\in I} T_i(B)$ *est bornée dans* F. □

Théorème 3.1.6

Soient E et F deux **evt**. Soit $(T_i)_{i\in I}$ une famille d'applications **linéaires continues** de E dans F.
Notons, pour $x \in E$, $\Gamma(x) = \{T_i(x)\ ;\ i \in I\}$ et $A = \{x \in E \parallel \Gamma(x) \text{ est bornée dans } F\}$.
Si A n'est pas maigre dans E, alors
1. $(T_i)_{i\in I}$ est équicontinue.
2. $A = E$.

Preuve .
1. $(T_i)_{i\in I}$ *est équicontinue :* *Soit* $V \in \mathcal{V}_F(0)$, *soit* $U \in \mathcal{V}_F(0)$ *équilibré tel que*

$$U+U+U+U \subset V.$$

Posons $\Omega = \bigcap_{i\in I} T_i^{-1}\left(\overline{U}\right)$, *puisque les* T_i *sont continues on a* Ω *est un fermé de* E.
Or $\forall x \in E$

$$\begin{aligned}
x \in A &\Longrightarrow \Gamma(x) \text{ est bornée dans } F\\
&\Longrightarrow \exists t>0,\ \Gamma(x) \subset tU\\
&\Longrightarrow \exists n\mathbb{N}^*,\ \Gamma(x) \subset nU \qquad\qquad \text{car } U \text{ est équilibrée}\\
&\Longrightarrow \exists n\mathbb{N}^*,\ \forall i \in I T_i(x) \subset nU \subset n\overline{U}\\
&\Longrightarrow \exists n\mathbb{N}^*,\ \forall i \in I x \in nT_i^{-1}(\overline{U}) \qquad\qquad \text{car } T_i \text{ est linéaire}\\
&\Longrightarrow x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} n\Omega.
\end{aligned}$$

Donc $A \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} n\Omega$ *et puisque* A *est maigre on a* $\exists n_0 \in \mathbb{N}^*,\ int(n_0\Omega) \neq \emptyset$ *donc*

$$\overset{\circ}{\Omega} \neq \emptyset.$$

Soit $\omega \in \overset{\circ}{\Omega}$, *donc* $W \overset{def}{=} -\omega + \Omega \in \mathcal{V}_E(0)$.
Soit $x \in W$ *donc* $x+\omega \in \Omega$ *et par suite* $\forall i \in I$, $T_i(x+\omega) \in \overline{U}$ *d'où* $T_i(x) \in -T_i(\omega)+\overline{U}$, *or* $\omega \in \Omega$ *donc* $-T_i(\omega) \in -\overline{U} = \overline{U}$ *(car* $\overline{U}$ *est équilibrée). Ainsi,*

$$T_i(x) \in -T_i(\omega) + \overline{U} \subset \overline{U} + \overline{U} \subset U+U+U+U \subset V.$$

Donc $W \subset \bigcap_{i\in I} T_i^{-1}(V)$ *ce qui nous donne* $\bigcap_{i\in I} T_i^{-1}(V) \in \mathcal{V}_E(0)$. $(T_i)_{i\in I}$ *est équicontinue.*
2. $A = E$ *:* *Soit* $x \in E$, *d'après la proposition 3.1.5 on a* $\{x\}$ *est borné donc* $\bigcup_{i\in I} T_i(\{x\}) = \Gamma(x)$ *est bornée dans* F *c-à-d* $x \in A$. □

Théorème 3.1.7 (théorème de Banach-Steinhaus)

Soit $(E,\mathcal{T})$ un **evt de Baire** (e.g. espaces de Fréchet, espaces d Banach ...) et F un evt. Soit $(T_i)_{i\in I}$ une famille d'applications **linéaires continues** de E dans F telle que

$$\forall x \in E,\ \{T_i(x)\ ;\ i \in I\} \text{ est bornée dans } F.$$

Alors $(T_i)_{i\in I}$ est équicontinue.

Preuve . *Reprenons les notations du théorème 3.1.6. On a $A = E$ qui n'est pas maigre puisque E est un espace de Baire. On applique donc le théorème 3.1.6 pour conclure.* □

Corollaire 3.1.8

Soit $(E,\mathcal{T})$ un evt de Baire et F un evt séparé. Soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications **linéaires continues** de E dans F telle que

$$\forall x \in E,\ \lim_{n\to+\infty} T_n(x) \text{ existe dans } F.$$

Alors $T : E \to F,\ x \mapsto \lim_{n\to+\infty} T_n(x)$ est bien définie linéaire continue.

Preuve .
✓ *On a T est bien définie car F est séparé ce qui donne l'unicité de la limite.*
✓ *On a T est linéaire car les T_n le sont.*
✓ *On a $\Gamma(x) = \{T_n(x)\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$ est bornée, en effet soit $V \in \mathcal{V}_F(0)$, soit $U \in \mathcal{V}_F(0)$ équilibré tel que $U + U \subset V$. Soit un entier n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0,\ T_n(x) \in l + U$ avec $l = \lim_{n\to+\infty} T_n(x)$. Soit $\beta > 0$ tel que $\beta l \in U$, pour tout $k \in \{0,\cdots,n_0\}$, $\alpha_k > 0$ tel que $\alpha_k T_k(x) \in U$. Posons $t \overset{def}{=} \min\{\alpha_0,\cdots,\alpha_{n_0},1,\beta\}$. Puisque U est équilibré, on a*

$$t\ \{T_n(x)\ ;\ n \in \mathbb{N}\} \subset V.$$

✓ *T est continue. En effet, Soit $V \in \mathcal{V}_F(0)$, $U \in \mathcal{V}_E(0)$ équilibré tel que $U + U \subset V$. D'après le théorème de Banach Steinhaus 3.1.7, $W = \bigcap_n T_n^{-1}(U) \in \mathcal{V}_E(0)$, soit*
Soit $x \in W$.
Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0,\ \ T_n(x) \in T(x) + U$. U est équilibré et $x \in W$ implique que $-T_n(x) \in U$. D'où $T(x) \in U + U \subset V$. Ce qui nous donne $W \subset T^{-1}(V)$ par suite T est continue en 0 et donc continue puisqu'elle est linéaire d'un evt dans un evt. □

Corollaire 3.1.9 (théorème de Banach-Steinhaus)

Soient E et F deux espace de Banach. Soit $(T_i)_{i\in I}$ une famille d'applications linéaires continues de E dans F. On suppose que

$$\forall\, x \in E, \sup_{i\in I} \|T_i x\|_F < \infty.$$

Alors

$$\sup_{i\in I} \|T_i\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \infty.$$

Autrement dit,

$$\exists\, c \in \mathbb{R} : \forall\, i \in I, \|T_i x\|_F \leq c\|x\|_E.$$

Preuve . *D'après le théorème de Banach-Steinhaus 3.1.7, $(T_i)_{i\in I}$ est équicontinue. Donc $\bigcap_{i\in I} T_i^{-1}(B(0,1)) \in \mathcal{V}_E(0)$, ainsi il existe $r > 0$ tel que $B(0,r) \subset \bigcap_{i\in I} T_i^{-1}(B(0,1))$.*
Soit $x \in E$ et $\varepsilon > 0$ donc $\frac{r}{\varepsilon+\|x\|} x \in B(0,r)$ donc $\forall i \in I$, $\|T_i(\frac{r}{\varepsilon+\|x\|} x)\| < 1$, on obtient $\forall i \in I$, $\|T_i(x)\| < \frac{1}{r}(\varepsilon + \|x\|)$. En tendant $\varepsilon \to 0^+$, on a

$$\forall i \in I, \qquad \|T_i(x)\| \leqslant \frac{1}{r}\,\|x\|.$$

□

Preuve (Une deuxième méthode). *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose*

$$X_p := \{x \in E : \forall\, i \in I, \|T_i x\|_F \leq p\}.$$

Pour tout $p \in \mathbb{N}^*, X_p$ est un fermé :
En effet : *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X_p telle que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x.*

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : \|T_i x_n\|_F \leq p, \forall\, i \in I,$$

comme $\forall\, i \in I, T_i$ est continue, par passage à la limite on trouve que

$$\|T_i x\|_F \leq p, \forall\, i \in I,$$

ce qui donne que $x \in X_p, \forall\, p \in \mathbb{N}$. En plus, puisque

$$\forall\, x \in E, \sup_{i\in I} \|T_i x\|_F < \infty,$$

si $p \geq E(\sup_{i\in I} \|T_i x\|_F) + 1$, (où $E(y)$ désigne la partie entière de y), alors $x \in X_p$ et donc $\cup_{i\in I} X_p = E$. On tire du lemme de Baire que $\exists\, p_0 \in \mathbb{N}$ telle que $\mathring{X}_{p_0} \neq \emptyset$.
Soit $x_0 \in E$ et $r > 0$ tels que $B(x_0,r) \subset X_{p_0}$. On a :

$$\forall\, i \in I, \forall\, z \in B(0,1) : \|T_i(x_0) + rT_i(z)\| \leq p_0.$$

Ainsi

$$\forall\, i \in I, \forall\, z \in B(0,1) : \|T_i(z)\| \leq \frac{1}{r}(p_0 + T_i(x_0)).$$

D'où

$$\sup_{i\in I} \|T_i\| < \infty.$$

□

Corollaire 3.1.10

Soient E et F deux espaces de Banach. Soit $(T_n)_{n\in I}$ une famille d'opérateurs linéaires continus de E dans F. On suppose que $\forall\, x \in E$, la suite $(T_n x)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite Tx. Alors

1. $$\sup_{i\in I} \|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \infty;$$
2. $T \in \mathcal{L}(E,F)$;
3. $\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \lim_{n\to+\infty} \inf \|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)}$.

Preuve .

1. *Résulte directement du théorème de Banach-Steinhaus. Il existe $c > 0$ telle que :*

   $$\forall\, n \in \mathbb{N}, \forall\, x \in E, \|T_n x\| \leq c\|x\|.$$

   Par passage à la limite, on obtient que : $\|Tx\| \leq c\|x\|, \forall\, x \in E$.
2. *Il est facile de vérifier que T est linéaire ;*
3. *On a*

   $$\|T_n x\| \leq \|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)}\|x\|, \forall\, x \in E$$

   par passage à la limite, on trouve que :

   $$\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \lim_{n\to+\infty} \inf \|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)}.$$

□

Corollaire 3.1.11

Soit G un espace normé et soit B un sous-ensemble de G. On suppose que :
$\forall f \in G'$ l'ensemble $f(B)$ est borné dans $\mathbb{R}$. Alors B est borné dans G.

Preuve . *On applique le théorème de Banach Steinhaus 3.1.9 avec* $E = G'$, $F = \mathbb{R}$ *et* $I = B$. *Pour chaque* $b \in B$, *on pose*

$$T_b(f) = f(b), \forall f \in G'$$

donc

$$\forall f \in G', \qquad \sup_{b \in B} |T_b(f)| < +\infty.$$

Il existe $c > 0$ *telle que :*

$$\forall f \in G', \forall b \in B, |f(b)| \leq c\|f\|.$$

Donc, d'après le théorème de Hahn Banach,

$$\forall b \in B, \qquad \|b\| = \max_{\|f\|=1} |f(b)| \leq c.$$

□

Corollaire 3.1.12

Soit G un espace de *Banach* et soit B' un sous-ensemble de G'. On suppose que :
$\forall x \in G$ l'ensemble $\{f(x) : f \in G'\}$ est borné dans $\mathbb{R}$. Alors B' est borné dans G'.

Preuve . *On applique le théorème de Banach Steinhaus 3.1.9 avec* $E = G, F = \mathbb{R}$ *et* $I = B'$. *Pour chaque* $f \in B'$ *on pose*

$$T_f(x) = f(x), \qquad \forall x \in G$$

donc il existe $c > 0$ *telle que :*

$$\forall x \in G, \forall f \in B', |f(x)| \leq c\|x\|.$$

Donc

$$\forall f \in B', \qquad \|f\| \leq c.$$

□

3.2 Application ouverte

Théorème 3.2.1 (théorème de l'application ouverte)

Soit $(E, \mathcal{T}_E)$ un espace de Fréchet et $(F, \mathcal{T}_F)$ un evt séparé. Soit T une application **linéaire continue** de E dans F telle que $T(E)$ n'est pas maigre dans F. Alors
1. T est ouverte c-à-d $\forall\, \theta \in \mathcal{T}_E, \quad T(\theta) \in \mathcal{T}_F$.
2. $T(E) = F$.
3. F un espace de Fréchet.

Preuve .
Soit $\mathcal{P} = \{p_n \;;\; n \in \mathbb{N}\}$ *une suite de semi normes qui engendre la topologie* $\mathcal{T}_E$ *(i.e.* $\mathcal{T}_E = \mathcal{T}_E(\mathcal{P})$*) et soit la distance* $d(x,y) = \max_n \left[\frac{1}{2^n}(p_n(y-x) \wedge 1)\right]$. *On sait que* $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}_E = \mathcal{T}_E(\mathcal{P})$ *et que* (E,d) *est complet (donc* $(E, \mathcal{T}_E)$ *est un espace de Baire).*
1. En plusieurs étapes :

$\boxed{i.}$ $\underline{\forall V \in \mathcal{V}_E(0), \quad \overset{\circ}{\overline{T(V)}} \neq \emptyset :}$
En effet, soit $U \in \mathcal{V}_E(0)$ équilibré tel que $U \subset V$. Soit $x \in E$ donc il existe $t > 0$ tel que $x \in tU$ (tout voisinage de 0 est absorbant). Soit n un entier tel que $n > t$ donc $x \in n\frac{t}{n} U \subset nU$ (U est équilibré), ainsi $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} nV$. D'où

$$T(E) \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} n\overline{T(V)}.$$

Mais $T(E)$ n'est pas maigre donc $\overset{\circ}{\overline{T(V)}} \neq \emptyset$.
$\boxed{ii.}$ $\underline{\forall V \in \mathcal{V}_E(0), \quad \overline{T(V)} \in \mathcal{V}_F(0) :}$
En effet, soit $U \in \mathcal{V}_E(0)$ équilibré tel que $U + U \subset V$. Puisque U est équilibré, on a $-U = U$ et donc $U - U \subset V$. La linéarité de T nous assure que $T(U) - T(U) \subset T(V)$ et par conséquent

$$\overset{\circ}{\overline{T(U)}} - \overset{\circ}{\overline{T(U)}} \subset \overset{\circ}{\overline{T(U) - T(U)}} \subset \overset{\circ}{\overline{T(V)}},$$

car $\forall A,B \subset E, \quad \overset{\circ}{A} - \overset{\circ}{B} \subset int(A - B)$ et $\overline{A} - \overline{B} \subset \overline{A - B}$ (en exercice, simple!) .
Soit $z \in \overset{\circ}{\overline{T(U)}}$ (qui existe d'après l'étape i)), donc $0 = z - z \in \overset{\circ}{\overline{T(V)}}$.
$\boxed{iii.}$ $\underline{\forall V \in \mathcal{V}_E(0), \exists U \in \mathcal{V}_E(0), \quad \overline{T(U)} \subset T(V) :}$
Soit $V \in \mathcal{V}_E(0)$ donc il existe $r > 0$ tel que $B^f(0,2r) \subset V$ et notons $U_n = B(0,2^{-n}r)$.
On a, puisque la distance d est invariante par translation, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} \subset U_{n+1} - U_{n+1} \subset U_n \subset V$ et $U_0 - U_0 \subset V$.
Soit $y \in \overline{T(U_0)}$.
Construisons par récurrence une suite $(x_n,y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $F \times E$:
$y_0 = y$ et puisque $y_0 \in \overline{T(U_0)}$ alors $\left[y_0 - \overline{T(U_1)}\right] \cap T(U_0) \neq \emptyset$ donc il existe $x_0 \in U_0$ tel que $y_0 - T(x_0) \in \overline{T(U_1)}$.
$y_1 = y_0 - T(x_0)$ et puisque $y_1 \in \overline{T(U_1)}$ alors $\left[y_1 - \overline{T(U_2)}\right] \cap T(U_1) \neq \emptyset$ donc il existe $x_1 \in U_1$ tel que $y_1 - T(x_1) \in \overline{T(U_2)}$.
Supposons qu'on a construit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, (x_n,y_n) tel que $y_n \in \overline{T(U_n)}$, $x_n \in U_n$, $y_n - T(x_n) \in \overline{T(U_{n+1})}$ et $y_n = y_{n-1} - T(x_{n-1})$. Posons $y_{n+1} = y_n - T(x_n) \in \overline{T(U_{n+1})}$ alors $\left[y_{n+1} - \overline{T(U_{n+2})}\right] \cap T(U_{n+1}) \neq \emptyset$, donc il existe $x_{n+1} \in U_{n+1}$ tel que

$$y_{n+1} - T(x_{n+1}) \in \overline{T(U_{n+2})}.$$

Ce qui donne (x_{n+1},y_{n+1}) avec les propriétés voulues.
En utilisant $y_n = y_{n-1} - T(x_{n-1})$ et en posant $s_n \overset{def}{=} \sum_{i=0}^{n-1} x_i$, on a

$$y_n = y - T(s_n).$$

Or pour tout $n,p \in \mathbb{N}$,

$$d(s_{n+p},s_n) = d(s_{n+p} - s_n,0) = d(\sum_{i=n}^{n+p-1} x_i,0) \leqslant \sum_{i=n}^{+\infty} d(x_i,0) \leqslant \sum_{i=n}^{+\infty} \frac{r}{2^i} \leqslant \frac{2r}{2^n}.$$

Ainsi $(s_n)_n$ est une suite de Cauchy dans l'espace complet (E,d) donc converge vers un élément s de E. Mais

$$d(s_n,0) = d(\sum_{i=0}^{n-1} x_i,0) \leqslant \sum_{i=0}^{+\infty} d(x_i,0) \leqslant \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{r}{2^i} \leqslant 2r.$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad s_n \in B^f(0,2r)$ donc $s \in B^f(0,2r) \subset V$. On a ainsi la suite $(y_n)_n$ converge vers $y - T(s)$.
D'autre part, soit $W \in \mathcal{V}_F(0)$ arbitraire et considérons $\theta \in \mathcal{V}_F(0)$ équilibré tel que $\theta + \theta \subset W$. Puisque $y_n \in \overline{T(U_n)}$, on obtient $[y_n - \theta] \cap T(U_n) \neq \emptyset$, il existe donc $\exists z_n \in U_n$ tel que
$y_n \in T(z_n) + \theta$. Or $d(z_n,0) \leqslant \frac{r}{2^n}$ donc $(z_n)_n \to 0$ et la continuité de T implique $(T(z_n))_n \to 0$; Ainsi il existe un entier n_0 tel que $\forall n \geqslant n_0$, $T(z_n) \in \theta$. D'où $\forall n \geqslant n_0$, $y_n \in \theta + \theta \subset W$. Donc $(y_n)_n$ converge vers 0. Mais F est séparé donc $y = T(s) \in T(V)$.
Ainsi

$$\overline{T(U_0)} \subset T(V).$$

$\boxed{iv.}$ $\underline{\forall \theta \in \mathcal{T}_E, \quad T(\theta) \in \mathcal{T}_F :}$
Soit $y \in T(\theta)$, donc il existe $x \in \theta$ tel que $y = T(x)$ donc $(-x + \theta) \in \mathcal{V}_E(0)$ et par suite $T(-x + \theta) = -y + T(\theta) \in \mathcal{V}_F(0)$. Ainsi $T(\theta) \in \mathcal{V}_F(y)$. y étant arbitraire dans $T(\theta)$ donc $T(\theta) \in \mathcal{T}_F$. □

2. $T(E)$ est un sous espace vectoriel ouvert de F, donc $T(E) = F$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $q_n : F \to \mathbb{R}_+,\ y \mapsto \inf_{x \in T^{-1}\{y\}} p_n(x)$. On montre que $\mathcal{Q} = \{q_n\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$ est une suite de semi normes sur F qui engendre $\mathcal{T}_F$ et on montre que F est complet au sens des evt. Voir TD.

Corollaire 3.2.2

Soient E, F deux espaces de Fréchet et $T : E \to F$ linéaire continue surjective. Alors T est une application ouverte.

Preuve . *$T(E) = F$ est maigre (c'est un espace de Baire). D'après le théorème de l'application ouverte T est une application ouverte.* □

Corollaire 3.2.3

Soient E, F deux espaces de Fréchet et $T : E \to F$ linéaire continue bijective. Alors T^{-1} est une continue.

Preuve . *D'après le corollaire précédent.* □

Corollaire 3.2.4 (théorème de l'application ouverte, cas Banach)

Soient E et F deux espaces de Banach et soit T un opérateur linéaire continu et surjectif de E sur F. Alors il existe une constante $c > 0$ telle que :

$$B_F(0,c) \subset T(B_E(0,1)).$$

Corollaire 3.2.5

Soit E un espace vectoriel muni de deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$. On suppose que E muni de chacune des normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ est un espace de Banach. On suppose de plus qu'il existe une constante $c \geq 0$ telle que :

$$\|x\|_2 \leq c\|x\|_1,\ \forall\, x \in E.$$

Alors il existe une constante $c' > 0$ telle que :

$$\|x\|_1 \leq c'\|x\|_2,\ \forall\, x \in E.$$

Autrement dit les deux normes sont équivalentes.

Preuve . *Il suffit d'appliquer le corollaire précédent avec*

$$E = (E, \|\cdot\|_1),\ F = (E, \|\cdot\|_2)\ \text{ et } T = Id_E.$$

□

3.3 Graphe fermé

Soit E, F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.

Définition 3.3.1

On définit le graphe de f par :

$$C_f = G_f = \{(x, f(x) \ ; \ x \in E)\} \subset E \times F.$$

Remarque 3.3.2.
✓ *Si E et F deux espaces vectoriels et f linéaire, alors G_f est un sous espace vectoriel de $E \times F$.*
✓ *Si E et F deux espaces topologiques et f continue, alors G_f est un ouvert de $E \times F$ muni de la topologie produit.*

Théorème 3.3.3 (Théorème des graphes fermés)

Soient E et F deux espaces de Fréchet. Soit T un opérateur linéaire de E dans F.

$$G(T) \text{ est fermé dans } E \times F \text{ si et seulement si } T \text{ est continu.}$$

Preuve .
$\Longleftarrow$: *Facile. Voir cours topologie ou la remarque précédente.*
$\Longrightarrow$: *Soit* $p_1 : \begin{array}{ccc} E \times F & \longrightarrow & E \\ (x,y) & \longmapsto & x \end{array}$ *et* $p_2 : \begin{array}{ccc} E \times F & \longrightarrow & E \\ (x,y) & \longmapsto & y. \end{array}$ *Posons*

$$f = p_{1|G_T} : \begin{array}{ccc} G_T & \longrightarrow & E \\ (x,y) & \longmapsto & x. \end{array}$$

• *On a G_T muni de la topologie trace de la topologie produit sur $E \times F$ est un espace de Fréchet car $E \times F$ est de Fréchet (voir TD) et G_T est un sous espace fermé de $E \times F$.*
• *On a f bijective puisque $f(x, T(x)) = x$ (f surjective) et $f(x,y) = f(x',y') \implies x = x'$, donc $y = T(x) = T(x') = y'$ ainsi $(x, y = (x', y')$ (f injective).*
• *On a f est continue puisque c'est une restriction de fonction continue p_1.*
D'après le théorème de l'application ouverte $g = f^{-1} : E \to G_T, \ \ x \mapsto (x, T(x))$ est continue. D'où $T = p_2 \circ g$ est continue. □

Sommaire

Chapitre 4

Topologies faibles-Espaces réflexifs

4.1 Topologie faible

Dans la suite de ce chapitre $(E, \|\cdot\|_E)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 4.1.1

La topologie sur E induite par sa norme $\|\cdot\|$ est dite la topologie forte sur E elle est engendrée par la suite finie (en fait une seul semi norme) de semi normes $\{\|\cdot\|\}$ séparante. La topologie forte sur l'espace normé $(E, \|\cdot\|_E)$ sera notée $b(E,E')$ ou $\mathcal{T}_E^{fort}$.

Définition 4.1.2

À partir de $(E, \|\cdot\|_E)$, on définit un nouvel espace E', l'espace dual (topologique) de $(E, \|\cdot\|_E)$ par $E' = \{f : E \to \mathbb{K}, \mathbb{K}-\text{linéaire continue}\}$.

Proposition 4.1.3

L'espace E' est un espace de Banach lorsqu'il est muni de la norme :

$$\|f\|_{E'} = \sup_{x\in E, x\neq 0} \frac{|f(x)|}{\|x\|} = \sup_{x\in E, \|x\|=1} |f(x)| = \sup_{x\in E, \|x\|\leq 1} |f(x)|.$$

Remarque 4.1.4. *D'après le théorème de Hahn-Banach (en fait un de ses corollaires),*

$$\forall x \in E, \quad \exists f_x \ \ \mathbb{R}\text{-}\textit{linéaire continue} \text{ tel que } \|x\|_E = f_x(x) \text{ et } \|f_x\|_{E'} = 1.$$

Posons $g_x : E \to \mathbb{K},\ t \mapsto \begin{cases} f_x(t) & si\ \mathbb{K} = \mathbb{R} \\ f_x(t) - i f_x(it) & si\ \mathbb{K} = \mathbb{C} \end{cases}$. *On a* $g_x \in E'$, $\|g_x\|_{E'} \leqslant \sqrt{2}$ *et* $\|x\| = \mathfrak{Re}(g_x(x))$.

On considère la famille d'application $(p_f)_{f\in E'}$

$$p_f : \begin{array}{rl} E \to & \mathbb{R}_+ \\ x \to & |f(x)|. \end{array}$$

Proposition 4.1.5

$\mathcal{P} \overset{\text{def}}{=} \left\{p_f \;;\; f \in E'\right\}$ est une famille de semi norme séparante sur E.

Preuve . *Il est simple de montrer que $\mathcal{P}$ est une famille de semi normes (il suffit d'écrire la définition !). Pour montrer qu'elle séparante, on utilise la remarque précédente.* □

Définition 4.1.6 (La topologie faible)

La topologie engendrée par la famille des semi normes $\mathcal{P}$, notée $\sigma(E,E')$ ou $\mathcal{T}_E^w$, sur E (i.e. $\sigma(E,E') = \mathcal{T}_E(\mathcal{P})$) est appelée la topologie faible sur $(E, \|\cdot\|_E)$.

Remarque 4.1.7.

✓ $\left\{\frac{1}{n}\bigcap_{f\in I} V_f \;;\; n \in \mathbb{N}^* \text{ et } I \text{ est une partie finie de } E'\right\}$ *est une base de voisinages de* 0 *pour la topologie faible* $\sigma(E,E')$.
Où

$$V_f = B_{p_f}(0,1) = \{x \in E \mid |f(x)| < 1\}.$$

✓ $(E, \sigma(E,E'))$ *est un evtlc séparé.*

Proposition 4.1.8

$\sigma(E,E')$ est la plus petite topologie sur E rendant continue les éléments de E'.

Preuve . *On a $\forall f \in E', \forall x \in E, \quad |f(x)| \leqslant p_f(x)$, donc d'après le théorème 2.2.16, f est $\sigma(E,E')$ continue.*
Réciproquement, Soit $\mathcal{T}'$ une topologie sur E qui rend continue les éléments de E'.
Soit $V \in \sigma(E,E')$.
Soit $x \in V$ donc il existe $n,m \in \mathbb{N}^*$, il existe $f_1, \cdots, f_m \in E'$ tel que $x + \frac{1}{n}\cap_{i=1}^m V_{f_i} \subset V$.
Or pour tout $i = 1 \cdot\cdot m$, $f_i : (E,\mathcal{T}') \to \mathbb{K}$ est continue en x donc $x + \frac{1}{n}V_{f_i} = f_i^{-1}(B_{\mathbb{K}}(f_i(x), \frac{1}{n}))$ est un voisinage de x pour la topologie $\mathcal{T}'$. Puisque l'intersection finie de voisinage de x est un voisinage de x, on a $x + \frac{1}{n}\cap_{i=1}^m V_{f_i}$ est un voisinage de x pour la topologie $\mathcal{T}'$. Par suite

$$V \text{ est un voisinage de } x \text{ pour la topologie } \mathcal{T}'.$$

Ainsi $V \in \mathcal{T}'$. CQFD

□

Corollaire 4.1.9

1. Si U est un ouvert faible (c-à-d $\theta \in \sigma(E,E')$) alors U est ouvert fort (i.e. $\theta \in b(E,E')$).
2. Si F est un fermé faible (c-à-d pour la topologie $\sigma(E,E')$) alors F est fermé fort (i.e. pour la topologie $\in b(E,E')$).
3. Si K est un compact fort (c-à-d pour la topologie $b(E,E')$) alors K est compact faible (i.e. pour la topologie $\sigma(E,E')$).

Preuve .
1. Évident, puisque pour tout $f \in E'$, on a $(E, b(E,E')) \to \mathbb{K}$ est continue par définition de E', alors $\sigma(E,E') \subset b(E,E')$.
2. Si F est un fermé faible alors $E \setminus F \in \sigma(E,E')$ donc $E \setminus F \in b(E,E')$ d'où F est fermé pour la topologie forte.
3. Si K est un compact fort. Soit $(\theta_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\sigma(E,E')$ qui recouvre K donc $(\theta_i)_{i\in I}$ est aussi une famille d'éléments de $b(E,E')$ qui recouvre K mais ce dernier est compact pour $b(E,E')$, ainsi il existe $J \subset I$ tel que J est finie et $K \subset \bigcup_{i\in J}\theta_i$. D'où la faible compacité. □

Notation 4.1.10. *Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de E, on désignera par $x_n \rightharpoonup x$ la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers x pour la topologie faible $\sigma(E,E')$.*

Proposition 4.1.11

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E. On a :

1. $x_n \rightharpoonup x$ pour $\sigma(E,E') \Leftrightarrow f(x_n) \to f(x), \quad \forall f \in E'$;
2. $x_n \to x$ fortement, alors $x_n \rightharpoonup x$ faiblement pour $\sigma(E,E')$;
3. $x_n \rightharpoonup x$ faiblement pour $\sigma(E,E')$, alors $\|x_n\|$ est bornée et $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$;
4. si $x_n \rightharpoonup x$ faiblement pour $\sigma(E,E')$ et si $f_n \to f$ fortement dans E', alors $f_n(x) \to f(x)$.

Preuve .

1. *résulte de la définition de la topologie faible $\sigma(E,E')$.*
2. *résulte de (1) puisque $|f_n(x) - f(x)| \leq \|f\|\|x_n - x\|$.*
3. *C'est une conséquence du théorème de Banach-Steinhaus. De plus, comme $\forall f \in E', (f(x_n))_n$ converge vers $f(x)$, on conclut que $(f(x_n))_n$ est bornée.*
   Soit $f \in E$, alors
   $$|f(x_n)| \leq \|f\|\|x_n\|$$
   et à la limite
   $$|f(x)| \leq \|f\| \liminf \|x_n\|.$$
   Par conséquent
   $$\|x\| = \sup_{\|f\|\leq 1} |f(x)| \leq \liminf \|x_n\|.$$
4. *On a*
   $$|f_n(x_n) - f(x)| \leq |(f_n - f)(x_n)| + |f(x_n - x)|.$$
   On conclut à l'aide de (1) et (3).

□

Proposition 4.1.12

Lorsque l'espace E est de dimension finie n, la topologie faible et la topologie forte coïncident.

Preuve . *On a $(E,b(E,E'))$ est un evt séparé de dimension n et aussi $(E,\sigma(E,E'))$ est un evt séparé de dimension n. D'après le théorème 2.1.24, il existe h homéomorphisme de $\mathbb{R}^n \to (E,b(E,E')$ et aussi de $\mathbb{R}^n \to (E,\sigma(E,E')$. Donc l'identité est un homéomorphisme de $(E,\sigma(E,E') \to (E,b(E,E')$. Ce qui montre que $(E,\sigma(E,E') = (E,b(E,E')$.* □

Théorème 4.1.13

Soit C une partie <u>convexe</u> de E.

C est faiblement fermé (pour $\sigma(E,E')$) si et seulement si C est fortement fermé (pour $b(E,E')$).

Preuve .
$\Longrightarrow$: *Facile, d'après le corollaire 4.1.9.*
$\Longleftarrow$: *Soit $x \in E \setminus C$. D'après le théorème de Hahn-Banach deuxième forme géométrique (puisque $\{x\}$ est compact convexe et C convexe fortement fermé disjoint de $\{x\}$), il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et il existe une application $\mathbb{R}$-linéaire continue de $(E,b(E,E'))$ tels que $\forall y \in C$, $f(x) < \alpha < f(y)$. Posons $g = f$ si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ posons*

$$\begin{array}{rccl} g: & E & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & f(z) - if(iz). \end{array}$$

On $g \in E'$ (à vérifier en exercice, g est le complexifié de f). Posons

$$\Omega = \begin{cases}]-\infty,\alpha[& si\ \mathbb{K} = \mathbb{R} \\ \{x+iy\ ;\ x<\alpha \text{ et } y \in \mathbb{R}\} & si\ \mathbb{K} = \mathbb{C}. \end{cases}$$

On a Ω est un ouvert de $\mathbb{K}$. Donc

$$x \in g^{-1}(\Omega) \subset E \setminus C,$$

ainsi $E \setminus C$ est un voisinage faible de x. Par conséquent $E \setminus C \in \sigma(E,E')$. Ce qui prouve que C est faiblement fermé. □

Proposition 4.1.14

Si E est de dimension infinie, alors
1. La fermeture pour la topologie faible $\sigma(E,E')$ de la sphère $S := \{x \in E : \|x\| = 1\}$ est la boule fermé $B = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$. En particulier, S n'est jamais faiblement fermé (alors qu'elle est fortement fermé).
2. L'intérieur faible de la boule ouverte $B^o = \{x \in E : \|x\| < 1\}$ est vide.

Preuve .
1. On a $B = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ est fortement fermé convexe donc B est faiblement fermé contenant S. Ainsi

$$S \subset \overline{S}^{\sigma(E,E')} = \overline{S}^{w} \subset B.$$

D'autre part, Supposons que $B \neq \overline{S}^{w}$ donc il existe $x \in B$ tel que $x \notin \overline{S}^{w}$, en particulier $\|x\| < 1$.
Soit donc V un voisinage de x pour la topologie faible $\sigma(E,E')$ tel que $S \cap V = \emptyset$. Donc il existe $\varepsilon > 0$ et il existe $f_1, \cdots, f_n$ tels que

$$x + \varepsilon \bigcap_{i=1}^{n} (|f_i| < 1) \subset V.$$

Considérons l'application linéaire $h : E \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto (f_1(x), \cdots, f_n(x))$, puisque la dimension de E est infinie alors h n'est pas injective, c'est à dire il existe $e \in E \setminus \{0\}$ tel que $h(e) = 0$. On a ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x+te \in x+\varepsilon \bigcap_{i=1}^{n} (|f_i| < 1) \subset V$. Considérons la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, $t \mapsto \|x+te\|$. On a g continue, $g(0) = \|x\| < 1$ et $g(\frac{1+\|x\|}{\|e\|}) \geqslant 1$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe $t_0 > 0$ tel que $\|x + t_0 e\| = 1$. Ainsi $x + t_0 e \in S \cap V = \emptyset$, absurde. Donc

$$B = \overline{S}^{w}.$$

2. Supposons que l'intérieur faible de la boule ouverte $B^o = \{x \in E : \|x\| < 1\}$ n'est pas vide. Donc il existe $x \in B^o$, il existe $\varepsilon > 0$ et il existe $f_1, \cdots, f_n$ tels que

$$x + \varepsilon \bigcap_{i=1}^{n} (|f_i| < 1) \subset B^o.$$

De la même manière que précédemment il existe $e \in E \setminus \{0\}$ tel que $x + \frac{1+\|x\|}{\|e\|} e \in x + \varepsilon \bigcap_{i=1}^{n} (|f_i| < 1) \subset B^o$. Ainsi

$$1 \leqslant \|\frac{1+\|x\|}{\|e\|} e\| - \|x\| \leqslant \|x + \frac{1+\|x\|}{\|e\|} e\| < 1;$$

Ce qui est absurde.

$$int_{\sigma(E,E')} B^o = \emptyset.$$

Alors que $int_{b(E,E')} B^o = B^o$. □

Corollaire 4.1.15

La topologie faible et la topologie forte coïncident si et seulement si la dimension de E est finie.

4.2 Topologie faible étoile

On définit l'espace bidual E'' de l'espace vectoriel normé $(E,\|\cdot\|)$ par

$$E'' = \{v : E' \to \mathbb{K}, \mathbb{K}-\text{linéaire continue}\}.$$

On munit E'' de la norme

$$\|v\|_{E''} = \sup_{f\in E', f\neq 0} \frac{|v(f)|}{\|f\|} = \sup_{f\in E', \|f\|=1} |v(f)| = \sup_{f\in E', \|f\|\leq 1} |v(f)|.$$

On sait que la topologie forte sur $(E',\|\cdot\|_{E'})$ est engendrée par la famille de semi normes séparante $\{\|\cdot\|_{E'}\}$ et que la topologie faible sur E' est celle engendrée par la famille $\mathcal{P} \stackrel{\text{def}}{=} \{p_v \ ; \ v \in E''\}$ où $p_v \to \mathbb{R}_+, \ f \mapsto p_v(f) = |v(f)|$.
Maintenant, on va définir une troisième topologie sur E', pour cela on considère la famille

$$\mathcal{Q} \stackrel{\text{def}}{=} \{q_x \ ; \ x \in E\},$$

où $q_x : E' \to \mathbb{R}_+, \ f \mapsto q_x(f) = |f(x)|$.
Considérons l'injection canonique (linéaire)

$$\begin{array}{rcl} J : E & \to & E'' \\ x & \to & J(x)(f) = f(x), \quad \forall f \in E'. \end{array}$$

Comme pour tout $x \in E$, $\sup\limits_{f\in E', \|f\|=1} |f(x)| \leqslant \|x\| \leqslant \sqrt{2} \sup\limits_{f\in E', \|f\|=1} |f(x)|$, d'après le corollaire 1.1.8, on en déduit que

$$\|J(x)\|_{E''} \underbrace{\leqslant}_{=\text{ si } \mathbb{K}=\mathbb{R}} \|x\|_E \leqslant \sqrt{2}\|J(x)\|_{E''}.$$

Remarque 4.2.1.

Proposition 4.2.2

$\mathcal{Q}$ est une famille de semi normes séparante sur E'.

Preuve . *Triviale.* □

DÉFINITION 4.2.3 (La topologie faible étoile)

La topologie engendrée par la famille des semi normes $\mathcal{Q}$, notée $\sigma(E',E)$ ou $\mathcal{T}_{E'}^{*w}$, sur E' (i.e. $\sigma(E',E) = \mathcal{T}_{E'}(\mathcal{Q})$) est appelée la topologie faible étoile sur $(E',\|\cdot\|_{E'})$.

Remarque 4.2.4.
✓ $\left\{\frac{1}{n}\bigcap\limits_{x\in I} V_x \ ; \ n \in \mathbb{N}^* \text{ et } I \text{ est une partie finie de } E\right\}$ *est une base de voisinages de* 0 *pour la topologie faible* $\sigma(E',E)$.
Où

$$V_x = B_{q_x}(0,1) = \{f \in E' \mid |f(x)| < 1\}.$$

✓ $(E',\sigma(E',E))$ *est un evtlc séparé.*
✓ $\forall x \in E$, $q_x = p_{J(x)}$ *donc* $\mathcal{Q} \subset \mathcal{P}$.
✓ $\sigma(E',E) \subset \sigma(E',E'') \subset b(E',E'')$.

Proposition 4.2.5

$\sigma(E',E)$ est la plus petite topologie sur E' rendant continue les éléments de $\{J(x) \ ; \ x \in E\}$.

Preuve . *On a* $\forall x \in E, \forall f \in E', \quad |J(x)(f)| = |f(x)| \leqslant q_x(f)$ *(égalité même !), donc d'après le théorème 2.2.16,* $J(x)$ *est* $\sigma(E',E)$ *continue.*
Réciproquement, Soit $\mathcal{T}'$ *une topologie sur* E' *qui rend continue les éléments de* $\{J(x) \ ; \ x \in E\}$.
Soit $V \in \sigma(E',E)$.
Soit $f \in V$ *donc il existe* $n,m \in \mathbb{N}^*$, *il existe* $x_1, \cdots, x_m \in E$ *tel que* $f + \frac{1}{n} \cap_{i=1}^m V_{x_i} \subset V$.
Or pour tout $i = 1 \cdots m$, $J(x_i) : (E', \mathcal{T}') \to \mathbb{K}$ *est continue en* f *donc* $f + \frac{1}{n} V_{x_i} = J(x_i)^{-1}(B_{\mathbb{K}}(f(x_i), \frac{1}{n}))$ *est un voisinage de* f *pour la topologie* $\mathcal{T}'$. *Puisque l'intersection finie de voisinage de* f *est un voisinage de* f, *on a* $f + \frac{1}{n} \cap_{i=1}^m V_{x_i}$ *est un voisinage de* f *pour la topologie* $\mathcal{T}'$. *Par suite*

$$V \text{ est un voisinage de } f \text{ pour la topologie } \mathcal{T}'.$$

Ainsi $V \in \mathcal{T}'$. *CQFD*

□

Proposition 4.2.6

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E'. On a :

1. $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ si, et seulement si, $\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle, \forall x \in E$;
2. $f_n \rightharpoonup f$ alors $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$;
3. si $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$, alors $(\|f_n\|)_n$ est bornée et $\|f\| \leq \liminf \|f_n\|$;
4. si $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$, et $x_n \to x$, alors $\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle$.

Proposition 4.2.7

Si E est de dimension finie, les trois topologies $\sigma(E',E), \sigma(E',E'')$ et $b(E',E'')$ coïncident.

Théorème 4.2.8 (Banach-Alaoglu-Bourbaki)

$B_{E'} = \{f \in E' \ : \ \|f\| \leqslant 1\}$ est compact pour la topologie faible étoile $\sigma(E',E)$.

Preuve . *La démonstration utilise le théorème de Tykhonov (ou Tykhonoff) donc utilise l'axiome du choix ou son équivalent lemme de Zorn.*
On a $E' = \{f : E \to \mathbb{R}$ tel que f *linéaire continue* $\} \subset \mathbb{R}^E = \{f : E \to \mathbb{R}\}$. *Je vous rappelle que la topologie produit* $\mathcal{T}_{\mathbb{R}^E} = \mathcal{T}_{\mathbb{R}}^{\otimes E}$ *sur* $\mathbb{R}^E$ *est la plus petite topologie sur* $\mathbb{R}^E$ *qui rend continue les projections :* $proj_x : \mathbb{R}^E \to \mathbb{R}, \ f \mapsto f(x)$.
Puisque la topologie usuelle sur $\mathbb{R}$ *est séparé alors*

$$\mathcal{T}_{\mathbb{R}^E} \text{ est séparé.}$$

Remarque 4.2.9. *Voir cours topologie générale pour les propriétés de cette topologie, on montre que* $(\mathbb{R}^E, \mathcal{T}_{\mathbb{R}^E})$ *est un evtlc séparé : le lemme qui suit vous donne une idée de la démonstration mais on peut aussi voir le polycopié de TD qui contient un exercice traitant les espaces produits des evt.*

Sur E', *on considère les deux topologies suivantes :*

✓ : $\sigma(E',E)$ *engendrée par la famille des semi normes* $\mathcal{Q} = \{q_x \ ; \ x \in E\}$ *avec* $q_x(f) = |f(x)|$.

✓ : *$E' \cap \mathcal{T}_{\mathbb{R}^E}$ la topologie trace sur E' de la topologie produit sur $\mathbb{R}^E$.*

Lemme 4.2.10

$$\sigma(E',E) = E' \cap \mathcal{T}_{\mathbb{R}^E}.$$

Preuve .
D'abord, on montre facilement que pour toute $f \in E'$, pour toute partie I de E et pour tout $\varepsilon > 0$,

$$E' \cap \underbrace{[proj_x]^{-1}\left(]f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon[\right)}_{\subset \mathbb{R}^E} = f + \varepsilon \underbrace{(|q_x| < 1)}_{\subset E'} = f + \varepsilon B_{q_x}.$$

✓ *Soit $\theta \in E' \cap \mathcal{T}_{\mathbb{R}^E}$ donc il existe $U \in \mathcal{T}_{\mathbb{R}^E}$ tel que $\theta = E' \cap U$.*
Soit $f \in \theta$, on a $f \in U$ donc il existe $\varepsilon > 0$ et il existe $I \subset E$ finie tels que

$$f \in \bigcap_{x \in I} [proj_x]^{-1}\left(]f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon[\right) \subset U.$$

Donc

$$f \in f + \varepsilon bigcap_{x\in I}\, B_{q_x} \subset \theta.$$

Ainsi $\theta \in \sigma(E',E)$, puisque f est arbitraire sur θ. D'où

$$E' \cap \mathcal{T}_{\mathbb{R}^E} \subset \sigma(E',E).$$

✓ *$\theta \in \sigma(E',E)$. Soit $f \in \theta$ donc il existe $\varepsilon > 0$ et il existe $I \subset E$ finie tels que*

$$f \in f + \varepsilon \bigcap_{x \in I} B_{q_x} \subset \theta.$$

Posons $U = [proj_x]^{-1}\left(]f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon[\right)$ qui un voisinage de f pour la topologie $\mathcal{T}_{\mathbb{R}^E}$, donc $f \in E' \cap U \subset \theta$. Ainsi θ est un voisinage de f pour la topologie trace $E' \cap \mathcal{T}_{\mathbb{R}^E}$, mais f est arbitraire dans θ ; donc $\theta \in E' \cap \mathcal{T}_{\mathbb{R}^E}$. D'où

$$\sigma(E',E) \subset E' \cap \mathcal{T}_{\mathbb{R}^E} \qquad \square$$

Posons pour $(x,y,\lambda) \in E^2 \times \mathbb{R}$,

$$h_{x,y,\lambda} : (\mathbb{R}^E, \mathcal{T}_{\mathbb{R}^E}) \to \mathbb{R};\ f \mapsto f(x+\lambda y) - f(x) - \lambda f(y).$$

On voit facilement que pour tout $(x,y,\lambda) \in E^2 \times \mathbb{R}$, $h_{x,y,\lambda}$ est continue.
D'autre part

$$B_{E'} = \left(\prod_{x \in E} [-\|x\|_E, \|x\|_E] \right) \bigcap \left(\bigcap_{(x,y,\lambda) \in E^2 \times \mathbb{R}} h^{-1}_{x,y,\lambda}(\{0\}) \right).$$

D'après le théorème de Tykhonov $K \overset{def}{=} \prod_{x \in E} [-\|x\|_E, \|x\|_E]$ est une partie compacte de $(\mathbb{R}^E, \mathcal{T}_{\mathbb{R}^E})$ (produit de compacts est compact), en particulier il est fermé. Mais on a aussi l'intersection des fermés est un fermé, d'où $B_{E'}$ est une partie fermé du compact K donc $B_{E'}$ est compact dans $(\mathbb{R}^E, \mathcal{T}_{\mathbb{R}^E})$ donc dans $(E', E' \cap \mathcal{T}_{\mathbb{R}^E}) = (E', \sigma(E',E))$. $\square$

4.3 Espaces réflexifs

Dans cette section $(E, \|\cdot\|_E)$ est un $\mathbb{R}$-espace normé (ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).
Les espaces réflexifs constituent une classe importante d'espaces de Banach ; ils possèdent des propriétés bien utiles.

Définition 4.3.1

On dit qu'un espace normé $(E,\|\cdot\|_E)$ est réflexif si l'injection canonique $J : E \to E'', \quad x \mapsto J(x)(f) = f(x)$ est surjective, i.e. $J(E) = E''$.

Remarque 4.3.2.
✓ *Il faut absolument que l'homéomorphisme soit donné par J, car on peut trouver un espace $(E,\|\cdot\|_E)$ non réflexif tel que $E \simeq E''$.*
✓ *Si $(E,\|\cdot\|_E)$ est réflexif alors $(E,\|\cdot\|_E)$ est un Banach. De plus les deux familles de semi normes sur E', $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ coïncident, ainsi les topologies faible et faible étoile, $\sigma(E',E'')$ et $\sigma(E',E)$, coïncident.*

Lemme 4.3.3

Si E est réflexif, alors $\sigma(E,E') = J^{-1}(\sigma(E'',E'))$.

Preuve .
✓ *Soit $U \in \sigma(E,E')$. Soit $v \in J(U)$, donc il existe $\varepsilon > 0$ et il existe $f_1,\cdots,f_n \in E'$ tel que $J^{-1}(v) + \varepsilon \cap_{i=1}^n (|f_i| < 1) \subset U$, or J est linéaire alors*

$$v + \varepsilon \cap_{i=1}^n J(V_{f_i}) \subset U.$$

$$\begin{aligned} t \in J(V_{f_i}) &\iff \exists x \in V_{f_i}, \quad t = J(x) \\ &\iff \exists x \in E, \quad t = J(x) \text{ et } |f_i(x)| < 1 \\ &\iff \exists x \in E, \quad t = J(x) \text{ et } |J(x)(f_i)| < 1 \\ &\iff |t(f_i)| < 1 \qquad\qquad \textit{puisque } J \textit{ est bijective.} \end{aligned}$$

Donc $J(V_{f_i})$ est un voisinage de 0 pour la topologie $\sigma(E'',E')$, ainsi $J(U)$ est un voisinage de v pour la topologie $\sigma(E'',E')$. Mais v est arbitraire dans $J(U)$, donc $J(U) \in \sigma(E'',E')$.
✓ *Réciproquement, soit $U \in J^{-1}(\sigma(E'',E'))$. Soit $x \in U$ donc $J(x) \in J(U) \in \sigma(E'',E')$, par conséquent, il existe $\varepsilon > 0$ et il existe $f_1,\cdots,f_n \in E'$ tels que*

$$J(x) + \varepsilon \cap_{i=1}^n \{t \in E'' \ ; \ |t(f_i)| < 1\} \subset J(U),$$

ainsi

$$x + \varepsilon \cap_{i=1}^n J^{-1}(\{t \in E'' \ ; \ |t(f_i)| < 1\}) \subset U.$$

Or $y \in J^{-1}(\{t \in E'' \ ; \ |t(f_i)| < 1\}) \iff |J(y)(f_i)| < 1 \iff |f_i(y)| < 1 \iff y \in (|f_i| < 1)$ donc $J^{-1}(\{t \in E'' \ ; \ |t(f_i)| < 1\}) = (|f_i| < 1)$ est un voisinage de 0 pour la topologie faible sur E. On en déduit que

$$U \in \sigma(E,E').$$

$\square$

Pour caractériser les espaces réflexifs, nous aurons besoin des deux lemmes suivants

Lemme 4.3.4 (Helly)

Soit E un espace normé, $f_1,\cdots,f_n \in E'$ et $\alpha_1,\cdots,\alpha_n \in \mathbb{K}$. Il y a équivalence entre :

(i) : Pour tout $\forall \varepsilon > 0, \ \exists x_\varepsilon \in B_E = \{z \in E \ ; \ \|z\| \leqslant 1\}, \ \forall i \in \{1,\cdots,n\}, \qquad |\langle f_i,x_\varepsilon\rangle - \alpha_i| < \varepsilon$.

(ii) : $\forall \beta_1,\cdots,\beta_n \in \mathbb{K}, \qquad |\sum_{i=1}^n \beta_i \alpha_i| \leq \|\sum_{i=1}^n \beta_i f_i\|$.

Preuve .

$(i) \Rightarrow (ii)$: Soit $\varepsilon > 0, \beta_1, \cdots, \beta_n \in \mathbb{K}$.

$$\begin{aligned} |\sum_{i=1}^n \beta_i \alpha_i| &\leq |\sum_{i=1}^n \beta_i(\alpha_i - \langle f_i, x_\varepsilon \rangle| + |\langle \sum_{i=1}^n \beta_i f_i, x_\varepsilon \rangle| \\ &\leq \varepsilon \textstyle\sum_{i=1}^n |\beta_i| + \|x_\varepsilon\| . \|\displaystyle\sum_{i=1}^n \beta_i f_i\|. \end{aligned}$$

Pour $\varepsilon \to 0$, on a le résultat.

$(ii) \Rightarrow (i)$: On pose

$$\begin{aligned} \phi : \ B_E &\longrightarrow \mathbb{K}^n \\ x &\longmapsto (f_1(x), \cdots, f_n(x)) \end{aligned}$$

Si $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$, l'assertion (i) équivaut à $\alpha \in \overline{\phi(B_E)}$.
Supposons que $\alpha \notin \overline{\phi(B_E)}$ (qui est un convexe fermé dans $\mathbb{K}^n$).
On a, d'après le théorème de hahn Banach, deuxième forme géométrique 1.1.14 (c'est ici qu'on a besoin que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$), il existe donc $\beta \in \mathbb{K}^n$ et $\gamma \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in B_E$, $\phi(x).\beta \leq \gamma < \alpha \cdot \beta$ ($\cdot$ est un produit scalaire sur $\mathbb{K}^n$). On a donc

$$\sum_{i=1}^n \beta_i \langle f_i, x \rangle \leq \gamma < \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i, \ \forall\, x \in B_E.$$

Alors

$$\|\sum_{i=1}^n \beta_i f_i\| \leq \gamma < \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i,$$

ce qui contredit (ii).

□

Lemme 4.3.5 (Goldstine)

Soit E un espace de Banach. $J(B_E)$ est dense dans $B_{E''}$ pour la topologie $\sigma(E'', E')$.

Preuve . *Soit $v \in B_{E''}$ et $W \subset E''$ un voisinage de v pour $\sigma(E'', E')$, donc il existe $\varepsilon > 0$ et $f_1, \cdots, f_n \in E'$ tels que*

$$V = \{\eta \in E'' : \forall\, i \in \{1, \cdots, n\}, |\langle \eta - v, f_i \rangle| < \varepsilon \text{ avec } f_i \in E'\} \subset W.$$

Pour $i = 1 \cdot\cdot n$, posons $\alpha_i = \langle v, f_i \rangle$
On a pour tout $\beta_1, \cdots, \beta_n \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |\sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i| &= |\sum_{i=1}^n \beta_i \langle v, f_i \rangle| \\ &= |\langle v, \sum_{i=1}^n \beta_i f_i \rangle| \\ &\leq \|\sum_{i=1}^n \beta_i f_i\| \text{ car } \|v\| \leq 1. \end{aligned}$$

D'après le lemme 4.3.4, il existe $x_\varepsilon \in E$ tel que $\forall\, i \in \{1, \cdots, n\}$,

$$|(J(x_\varepsilon) - v)(f_i)| = |\langle f_i, x_\varepsilon \rangle - \alpha_i| < \varepsilon,$$

donc $J(x_\varepsilon) \in J(B_E) \cap V \subset J(B_E) \cap W$. □

Théorème 4.3.6 (Kakutani)

Un espace de Banach E est réflexif si, et seulement si, la boule unité $B_E = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ est compacte pour $\sigma(E, E')$.

Preuve .
$\Longrightarrow$: *Supposons* E *est réflexif On a* $B_{E''}$ *est compacte pour la topologie* $\sigma(E'',E')$, *grâce au théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki 4.2.8 et* $J^{-1}(B_{E''}) = B_E$ *puisque* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *et donc* $\|J(x)\|_{E''} = \|x\|_E$.
On a pour tout $v \in E''$, *pour tout* $f \in E'$,

$$p_f(J^{-1}(v)) = |f(J^{-1}(v))| = |v(f)| = q_f(v).$$

D'après le théorème 2.2.14 l'application linéaire $J^{-1} : (E'',\sigma(E'',E')) \to (E,\sigma(E,E'))$ *est continue.*
$\Longleftarrow$: *Supposons que* B_E *est compacte pour* $\sigma(E,E')$.
On a pour tout $f \in E'$, *pour tout* $x \in E$,

$$q_f(J(x)) = |J(x)(f)| = |f(x)| = p_f(x).$$

D'après le théorème 2.2.14 l'application linéaire $J : (E,\sigma(E,E')) \to (E'',\sigma(E'',E'))$ *est continue. On a donc* $J(B_E)$ *est compact (donc fermé) de* $(E'',\sigma(E'',E'))$ *(ce dernier est séparé). Le lemme de 4.3.5, nous donne*

$$J(B_E) = \overline{J(B_E)}^{\sigma(E'',E')} = B_{E''}$$

et la linéarité de J *nous assure* $J(E) = E''$. ☐

Corollaire 4.3.7 (compacité faible d'un convexe fermé borné)

Soit $K \subset E$ un sous-ensemble convexe, fermé (fort), borné d'un espace de Banach réflexif. Alors K est compact pour la topologie $\sigma(E,E')$.

« Tous les convexes fermés bornés d'un espace de Banach réflexif sont compacts pour la topologie faible" ».

Preuve . *K est fermé dans $\sigma(E,E')$, et $K \subset \overline{B(0,M)}$ qui est compacte pour $\sigma(E,E') = \sigma(E'',E')$.* ☐

Lemme 4.3.8

Si $M \subset E$ est un sous-espace vectoriel fermé, alors $\sigma(M,M')$ est la topologie induite sur M par $\sigma(E,E')$.

Preuve . *Par définition de la topologie induite, on veut montrer que tout ouvert de M pour $\sigma(M,M')$ est l'intersection avec M d'un ouvert de E pour $\sigma(E,E')$. Or, par le théorème de Hahn-Banach, toute forme linéaire continue sur M peut se prolonger en une forme linéaire continue sur E. Inversement, toute forme linéaire continue sur E est continue sur M. Donc les voisinages élémentaires sur M définis par des $f \in M'$ et ceux définis par des $f \in E'$ sont simplement les mêmes.* ☐

Exercice 4.3.9

Si $M \subset E$ est un sous-espace fermé de E et si $M' = E'$, c'est à dire si toute forme linéaire continue sur M est la restriction à M d'une unique forme linéaire continue sur E, alors $M = E$.

Proposition 4.3.10

Soit E un espace réflexif, M un sous-espace vectoriel de E fermé. Alors M est réflexif pour la topologie induite.

Preuve . *Par le lemme précédent, $\sigma(M,M')$ est la restriction à M de $\sigma(E,E')$. Comme M est fermé, la boule $\overline{B_M} = \{x \in M, \|x\| \leq 1\}$ est un fermé de $\overline{B_E}$, qui est par le théorème 4.3.6 (Kakutani) un compact pour $\sigma(E,E')$. Donc $\overline{B_M}$ est aussi un compact pour $\sigma(M,M')$. Donc, à nouveau par le théorème 4.3.6, M est réflexif.* □

Proposition 4.3.11

Si E est un Banach, E est un Banach réflexif si, et seulement si, E' est réflexif.

Preuve .

$\Rightarrow$: *Si E est réflexif, par le théorème de Kakutani 4.3.6 il suffit de montrer que $B_{E'}$ est compacte pour la topologie $\sigma(E',E'')$.*
Or $\sigma(E',E'') = \sigma(E',E)$ car E est réflexif. Par le théorème 4.2.8 de Banach-Alaoglu-Bourbaki, $B_{E'}$ est compact pour la topologie faible étoile $\sigma(E',E)$.

$\Leftarrow$: *Si E' est réflexif, E'' l'est aussi. On a $J(E)$ est un fermé (fort) de E'' donc réflexif par la proposition 4.3.10. E est donc réflexif (voir TD).*

□

Définition 4.3.12

Un espace topologique E est dit séparable s'il possède une partie dénombrable D dense dans E : $\overline{D} = E$.

Théorème 4.3.13

Si E' est séparable, E l'est aussi.

Preuve . *Soit $(f_n)_n$ dense dans E'. Pour tout n, il existe $x_n \in E$ de norme 1 tel que $f_n(x_n) \geq \dfrac{\|f_n\|}{2}$.*
On a

$$D \overset{def}{=} Vect_{\mathbb{Q}}\{x_n \ ; \ n \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} \left\{ \sum_{i=0}^{k} r_i x_i \ ; \ (r_0, r_1, \cdots, r_k) \in \mathbb{Q}^{1+k} \right\}$$

est une partie dénombrable de E et $\overline{D} = \overline{Vect_{\mathbb{R}}\{x_n \ ; \ n \in \mathbb{N}\}} \subset E$.
Soit $\varphi \in E'$ qui annule sur le sous espace vectoriel $Vect_{\mathbb{R}}\{x_n \ ; \ n \in \mathbb{N}\}$ de E, en particulier sur tous les x_n. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|f_n - \varphi\| < \varepsilon.$$

On a alors

$$|f_n(x_n)| \leq |(f_n - \varphi)(x_n)| \leq \varepsilon \|x_n\|$$

donc $\|f_n\| \leq 2\varepsilon$. Ainsi,

$$\|\varphi\| \leq \|f_n - \varphi\| + \|f_n\| \leq 3\varepsilon$$

donc $\varphi = 0$. D'après le corollaire 1.1.16 ou la remarque 1.1.17, D est dense dans E. □

Remarque 4.3.14. *L'espace de Banach $E = L^1(\mathbb{R})$ est séparable alors que E' ne l'est pas.*

Corollaire 4.3.15

E réflexif et séparable si, et seulement si, E' l'est aussi.

Preuve .

($\Leftarrow$) *est clair, d'après la proposition 4.3.11 et le théorème 4.3.13*

($\Rightarrow$) *On a juste à montrer que E' est séparable, d'après la proposition 4.3.11. On a E réflexif séparable implique $E'' = J(E)$ séparable donc E' séparable, d'après la première implication.*

□

Théorème 4.3.16

Si E est un Banach séparable, $B_{E'}$ est métrisable pour la topologie faible étoile $\sigma(E',E)$.

Preuve . *E est séparable (pour la topologie forte) donc B_E l'est aussi (voir TD de topologie : propriété vraie pour les espaces métriques). Il existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dense dans B_E. On pose*

$$d(f,g) = \max_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n} |\langle f-g, x_n\rangle|.$$

d est bien une distance sur $B_{E'}$. On va montrer que sur $B_{E'}$, la topologie définie par d coïncide avec la topologie faible étoile $\sigma(E',E)$.

— *Soit $B(g,r) := \{f \in E' : \|f\| \leq 1, d(f,g) < r\}$.*

Il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{2^N} < r$, donc en particulier, pour tout $f,g \in B_{E'}$, pour tout $n \geqslant N+1$,

$$\frac{1}{2^n}|\langle f-g, x_n\rangle| \leqslant 2\frac{1}{2^n} < r.$$

Soit $V_{x_1,\cdots,x_N}(g) := \{f \in E' : \|f\| \leq 1, \forall\, i = 1 \cdot\cdot N, \quad |f(x_i) - g(x_i)| < r\}$. C'est un voisinage de g pour la topologie faible étoile et $V_{x_1,\cdots,x_N} \subset B(g,r)$ car pour tout $f \in V_{x_1,\cdots,x_N}$,

$$d(f,g) \leq \max_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n}|\langle f-g, x_n\rangle| < r.$$

— *Soit $V_{y_1,\cdots,y_d,\varepsilon}(g) = \{f \in B_{E'} : \forall\, i, |(f-g)(y_i)| < \varepsilon\}$ un voisinage de g pour la topologie faible toile.*

Pour tout i, il existe un entier n_i tel que $|x_{n_i} - y_i| < \frac{\varepsilon}{4}$ et posons $N = \max\{n_1, \cdots, n_d\}$ donc

$$V_{x_1,\cdots,x_N,\frac{\varepsilon}{2}}(g) \subset V_{y_1,\cdots,y_d,\varepsilon}(g).$$

Posons $r = \frac{\varepsilon}{2^{N+1}}$, On a $r > 0$ et

$$\begin{aligned} f \in B_d(g,r) &\Longrightarrow \forall n \in \{0,\cdots,N\}, |(f-g)(x_i)| < r2^N = \frac{\varepsilon}{2} \\ &\Longrightarrow f \in V_{x_1,\cdots,x_N,\frac{\varepsilon}{2}}(g) \subset V_{y_1,\cdots,y_d,\varepsilon}(g). \end{aligned}$$

Ce prouve que la trace de la topologie faible étoile $\sigma(E',E)$ sur $B_{E'}$ est engendrée par la distance d.

□

Remarque 4.3.17. ⚠ *Ce théorème ne dit pas que E' muni de la topologie faible étoile $\sigma(E',E)$ est métrisable. il l'est sauf en dimension finie.*

Théorème 4.3.18

Si E' est séparable, B_E est métrisable pour la topologie faible $\sigma(E,E')$.

Preuve . *Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dense dans $B_{E'}, x, y \in B_E$ et*

$$d(x,y) = \max_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n}|\langle x-y, \varphi_n\rangle|.$$

Et on procède comme dans la dernière démonstration. □

Proposition 4.3.19 (convergence des suites)

— Si E est séparable, $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E'. Alors si $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans E', il existe $\varphi \in E'$ et une suite extraite $(\varphi_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tel que $(\varphi_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers φ pour la topologie $\sigma(E',E)$.
— Si E est réflexif, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, il existe $x \in E$ et une suite extraite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tel que $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers x pour la topologie $\sigma(E,E')$.

Preuve .

✓ *Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M\,B_{E'}$ avec M un majorant de $\sup_n \|\varphi_n\|$. On a la compacité pour $\sigma(E',E)$ par Banach-Alaoglu et la métrisabilité par le théorème précédent puisque E est séparable. D'où le résultat.*

✓ *Soit $M = \overline{Vect}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. M est séparable. C'est aussi un fermé d'un réflexif, donc réflexif.*
RB_M est donc un métrique compact pour $\sigma(M,M')$ (avec R qui borne les x_n). D'où la convergence faible pour $\sigma(M,M')$ donc pour $\sigma(E,E')$.

□