1 Processus stochastique

EXERCICE 1
Soit la fonction

$$K: \begin{array}{ccc} [0,\infty[^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (s,t) & \longmapsto & s\wedge t. \end{array}$$

Montrer que K est de type positif. Dites pourquoi il existe un processus gaussien centré de fonction de covariance K ? (Ce processus est dit mouvement brownien 'brute').

Réponse :

Soit $n\in\mathbb{N}^*$, $t_1,\cdots,t_n\in\mathbb{R}^+$ tels que $0\leqslant t_1<\cdots<t_n$ et $\lambda_1,\cdots,\lambda_n\in\mathbb{R}$. En posant $s_i=t_i-t_{i-1}$ –avec $t_0=0$–, on a

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{n}\lambda_i\lambda_j\,K(t_i,t_j) &= \sum_{i,j=1}^{n}\lambda_i\lambda_j\sum_{k=1}^{i\wedge j}s_k\\ &= \sum_{k=0}^{n}s_k\sum_{i,j=k}^{n}\lambda_i\lambda_j=\sum_{k=1}^{n}s_k\left(\sum_{i=k}^{n}\lambda_i\right)^2\geqslant 0.\end{aligned}$$

Ainsi K est de type positif. De plus elle est symétrique et d'après le théorème de Kolmogorov, il existe un processus gaussien indexé par $\mathbb{R}^+$ centré et de matrice (ou fonction) de covariance K.

EXERCICE 2
Soit la fonction

$$K: \begin{array}{ccc} [0,1]^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (s,t) & \longmapsto & s\wedge t-st. \end{array}$$

Montrer que K est de type positif. Dites pourquoi il existe un processus gaussien centré de fonction de covariance K ? (Ce processus est dit pont brownien 'brute').

Réponse :

Soit $n\in\mathbb{N}^*$, $t_1,\cdots,t_n\in\mathbb{R}^+$ tels que $0\leqslant t_1<\cdots<t_n$ et $\lambda_1,\cdots,\lambda_n\in\mathbb{R}$. En posant $s_i=t_i-t_{i-1}$ –avec $t_0=0$–, on a

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{n}\lambda_i\lambda_j\,K(t_i,t_j) &= \sum_{i,j=1}^{n}\lambda_i\lambda_j\left[\sum_{k=1}^{i\wedge j}s_k-\sum_{k=1}^{i}s_k\sum_{k=1}^{j}s_k\right]\\ &= \sum_{k=1}^{n}s_k\left(\sum_{i=k}^{n}\lambda_i\right)^2-\left(\sum_{k=1}^{n}s_k\sum_{i=k}^{n}\lambda_i\right)^2\\ &\geqslant \sum_{k=1}^{n}s_k\left(\sum_{i=k}^{n}\lambda_i\right)^2-\left(\sum_{k=1}^{n}s_k\right)\times\left(\sum_{k=1}^{n}s_k\left(\sum_{i=k}^{n}\lambda_i\right)^2\right)\quad \text{inégalité de Schwarz}\\ &\geqslant (1-t_n)\times\left(\sum_{k=1}^{n}s_k\left(\sum_{i=k}^{n}\lambda_i\right)^2\right)\\ &\geqslant 0.\qquad \text{car } t_n\leqslant 1.\end{aligned}$$

Ainsi K est de type positif. De plus elle est symétrique et d'après le théorème de Kolmogorov, il existe un processus gaussien indexé par $[0,1]$ centré et de matrice (ou fonction) de covariance K.

EXERCICE 3
Soit T un temps d'arrêt et $\alpha\in\mathbb{R}_+$. A-t-on $T+\alpha$ et $(1+\alpha)T$ sont des temps d'arrêt ?

Réponse :

$$\checkmark\ (T+\alpha\leqslant t)=(T\leqslant t-\alpha)\in\mathcal{F}_{(t-\alpha)^+}\subset\mathcal{F}_t$$
$$\checkmark\ ((1+\alpha)T\leqslant t)=\left(T\leqslant\frac{t}{1+\alpha}\right)\in\mathcal{F}_{\frac{t}{1+\alpha}}\subset\mathcal{F}_t.$$

EXERCICE 4
On considère une base stochastique $(\Omega,\mathcal{F},P,(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}})$ et $X=(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un processus adapté à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Soit $A\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$.

Montrer que le temps d'entré dans A, $\tau_A=\inf\{n\in\mathbb{N}\,|\,X_n\in A\}$ est un temps d'arrêt et que le temps de dernier passage dans A, $S_A=\sup\{n\in\mathbb{N}\,|\,X_n\in A\}$ n'est pas un temps d'arrêt en général.

Réponse :

✓ $(\tau_A\leqslant k)=\bigcup_{n=0}^{k}(X_n\in A)\in\mathcal{F}_k$, puisque, $\forall n\leqslant k$, X_n est $\mathcal{F}_k$-mesurable. Donc le temps d'entré dans A, τ_A, est un temps d'arrêt.

✓ $(S_A \leqslant k) = \bigcap_{n>k} (X_n \notin A)$. Prenons l'exemple suivant :

$\bullet \Omega = \{0,1\}$
$\bullet \mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ et pour $n \geqslant 1,\ \mathcal{F}_n = \mathcal{P}(\Omega)$
$\bullet X_0 = 0$ et pour $n \geqslant 1,\ X_n(0) = 0$ et $X_n(1) = 1$
$\bullet A = \{0\}$.

On a $(S_A = 0) = (X_1 = 1) = \{1\} \notin \mathcal{F}_0$. Ainsi,

$\boxed{\text{le temps de dernier passage dans } A,\ \tau_A, \text{ n'est pas un temps d'arrêt en général.}}$

EXERCICE 5

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction non borélienne. Soit $\big(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,1]}\big)$ une base stochastique telle que $\mathcal{F}_t = \{\emptyset, \Omega\}$. Posons, pour $t \in [0,1]$ et $\omega \in \Omega$, $X_t(\omega) = f(t)$. Montrer que $(X_t)_t$ est adapté mais non progressivement mesurable.

Réponse :

On peut prendre $f = 1_A$ avec $A \in \mathcal{P}([0,1]) \setminus \mathcal{B}_{[0,1]}$. On a

✓ Pour tout $t \in [0,1]$ et $a \in \mathbb{R}$, $(X_t \leqslant a) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } f(t) \leqslant a \\ \Omega & \text{sinon} \end{cases} \in \mathcal{F}_t$. Ainsi, $(X_t)_t$ est adapté.

✓ Si $(X_t)_t$ est progressivement mesurable alors $X\colon \begin{array}{ccc} [0,1]\times\Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (t,\omega) & \longmapsto & f(t) \end{array}$ est $\mathcal{B}_{[0,1]} \otimes \mathcal{F}_1$-mesurable. En particulier, $f\colon \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(t) \end{array}$ est $\mathcal{B}_{[0,1]}$-mesurable. Absurde

Ainsi, $\boxed{(X_t)_t \text{ est adapté mais non progressivement mesurable}}$.

EXERCICE 6

Soit une base stochastique $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,\infty[})$ et $(X_t)_{t\geqslant 0}$ un processus progressif borné. Posons $Y_t(\omega) = \int_0^t X_s(\omega)\, ds$. Montrer que $(Y_t)_{t\geqslant 0}$ est progressif.

Réponse : (Méthode standard)

Soit $m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall (t,\omega) \in [0,\infty[\times\Omega,\ m \leqslant X_t(\omega)$. Posons $X'_t(\omega) = X_t(\omega) - m$, on a donc X' est un processus stochastique progressif positif. Posons $Y'_t(\omega) = \int_0^t X'_s(\omega)\, ds$. Puisque $Y'_t(\omega) = Y_t(\omega) - mt$, on a Y est progressif si, et seulement si Y' est progressif.

D'autre part, d'après le théorème d'approximation, il existe une suite croissante $(X^n)_n$ de processus étagés progressifs qui converge simplement vers X'. donc $Y^n_t(\omega) = \int_0^t X^n_s(\omega)\, ds$ converge en croissant vers $Y'_t(\omega)$. Ainsi, si $Y^n_t(\omega)$ est progressif pour tout entier n alors Y' et par suite Y le sont aussi.

Or X^n est étagé progressif donc $\exists d^n \in \mathbb{N}^*, \exists \alpha_1^n, \cdots, \alpha_1 d^n \in \mathbb{R}^+, \exists A_1^n, \cdots, A^n_{d^n} \in \mathcal{P}rog$ (où $\mathcal{P}rog$ est la tribu des ensembles progressivement mesurables) tels que

$$X^n_t(\omega) = \sum_{i=1}^{d_n} \alpha_i^n\, 1_{A_i^n}(t,\omega).$$

Donc

$$Y^n_t(\omega) = \sum_{i=1}^{d_n} \alpha_i^n \int_0^t 1_{A_i^n}(s,\omega)\, ds.$$

Ainsi, Y^n est progressif si $\forall A \in \mathcal{P}rog,\ (t,\omega) \mapsto \int_0^t 1_A(s,\omega) ds$ est progressif.

Considérons

$$\mathcal{M} \overset{\text{def}}{=} \left\{ C \in \mathcal{B}_{[0,t]} \otimes \mathcal{F}_t \ :\ (r,\omega) \mapsto \int_0^r 1_C(s,\omega) ds \text{ est } \mathcal{B}_{[0,t]} \otimes \mathcal{F}_t - \text{mesurable} \right\}.$$

On a

1. $\emptyset \in \mathcal{M}$,
2. $C \in \mathcal{M} \implies C^c \overset{\text{def}}{=} ([0,t]\times\Omega) \setminus C \in \mathcal{M}$, car $\forall (r,\omega) \in [0,t]\times\Omega$,
$$\int_0^r 1_{C^c}(s,\omega) ds = r - \int_0^r 1_C(s,\omega) ds.$$
3. Si $C, C' \in \mathcal{M}$ et $C \cap C' = \emptyset$ alors $C \cup C' \in \mathcal{M}$, car $\forall (r,\omega) \in [0,t]\times\Omega$,
$$\int_0^r 1_{C\cup C'}(s,\omega) ds = \int_0^r 1_C(s,\omega) ds + \int_0^r 1_{C'}(s,\omega) ds.$$
4. Si $(C_n)_n \in \mathcal{M}^{\mathbb{N}}$ telle que $C_n \subset C_{n+1}$ alors $C \overset{\text{def}}{=} \cup_n C_n \in \mathcal{M}$, car $\forall (r,\omega) \in [0,t]\times\Omega$,
$$\int_0^r 1_C(s,\omega) ds = \sup_n \int_0^r 1_{C_n}(s,\omega) ds.$$
5. Si $E \times D \in \mathcal{B}_{[0,t]} \times \mathcal{F}_t$ alors $E \times D \in \mathcal{M}$, car $\forall (r,\omega) \in [0,t]\times\Omega$,
$$\int_0^r 1_{E\times D}(s,\omega) ds = 1_D(\omega) \int_0^r 1_E(s) ds.$$

Ainsi, $\mathcal{M}$ est une classe monotone (d'après les points 1, 2 et 4) qui contient la semi-algèbre $\mathcal{B}_{[0,t]} \times \mathcal{F}_t$ (d'après le point 5) donc contient l'algèbre $a_{[0,t]\times\Omega}\big(\mathcal{B}_{[0,t]} \times \mathcal{F}_t\big)$ engendrée par la semi-algèbre $\mathcal{B}_{[0,t]} \times \mathcal{F}_t$ (d'après le point 3). Le théorème des classes monotones nous donne $\mathcal{M}$ contient la tribu engendrée par $a_{[0,t]\times\Omega}\big(\mathcal{B}_{[0,t]} \times \mathcal{F}_t\big)$ donc $\mathcal{M} = \mathcal{B}_{[0,t]} \otimes \mathcal{F}_t$. D'où $\forall C \in \mathcal{B}_{[0,t]} \otimes \mathcal{F}_t$

$$\boxed{(r,\omega)\mapsto \int_0^r 1_C(s,\omega)\mathrm{d}s \quad \text{est } \mathcal{B}_{[0,t]}\otimes\mathcal{F}_t-\text{mesurable}\ .}$$

En particulier, si $A\in \mathcal{P}rog$ (donc $\forall t\geqslant 0$, $A^t \overset{\text{def}}{=} A\cap([0,t]\times\Omega)\in\mathcal{B}_{[0,t]}\otimes\mathcal{F}_t$). et si $t\geqslant 0$ (fixé mais arbitraire)

$$(r,\omega)\in[0,t]\times\Omega\mapsto \int_0^r 1_A(s,\omega)\mathrm{d}s=\int_0^r 1_{A^t}(s,\omega)\mathrm{d}s \quad \text{est } \mathcal{B}_{[0,t]}\otimes\mathcal{F}_t-\text{mesurable}$$

Donc $(t,\omega)\mapsto\int_0^t 1_A(s,\omega)\mathrm{d}s$ est progressif.

Conclusion :
Pour tout processus progressif borné (ou positif) $(X_t)_{t\geqslant 0}$, le processus $Y_t(\omega)=\int_0^t X_s(\omega)\,\mathrm{d}s$ est aussi progressif.

EXERCICE 7

Soit $X=(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de v.a. iid et τ un t.a. adapté à la filtration engendrée par X tels que $\mathbb{E}\tau<\infty$ et $\mathbb{E}|X_0|<\infty$. Montrer que $\mathbb{E}\sum_{i=0}^{\tau}X_i=\mathbb{E}\tau\; EX_0$.

Réponse :

On a

$$\mathbb{E}\sum_{i=0}^{\tau}X_i^{\pm}=\mathbb{E}\sum_{k=0}^{\infty}1_{(\tau=k)}\sum_{i=0}^{k}X_i^{\pm}\qquad \text{car } \tau<\infty\ ps\ (\text{sinon, il faut ajouter le terme } 1_{(\tau=\infty)}\sum_{i=0}^{\infty}X_i^{\pm})$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=i}^{\infty}\mathbb{E}1_{(\tau=k)}X_i^{\pm}\qquad \text{d'après Tonelli-Fubini}$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}\mathbb{E}1_{(\tau\geqslant i)}X_i^{\pm}$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}\mathbb{E}1_{(\tau\geqslant i)}\mathbb{E}X_i^{\pm}$$

car $(\tau\geqslant i)\in\sigma(X_0,\cdots,X_{i-1})$ qui est indépendant de $X_i^{\pm}$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}\mathbb{E}1_{(\tau\geqslant i)}\mathbb{E}X_0^{\pm}$$

$$=\mathbb{E}\tau\mathbb{E}X_0^{\pm}.$$

Ainsi, $\mathbb{E}\sum_{i=0}^{\tau}|X_i|=\mathbb{E}\tau\mathbb{E}|X_0|<\infty$, donc

$$\boxed{\sum_{i=0}^{\tau}X_i \text{ est intégrable et } \mathbb{E}\sum_{i=0}^{\tau}X_i=\mathbb{E}\tau\ \mathbb{E}X_0.}$$

EXERCICE 8

Soit $X=(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. iid de loi de Bernoulli de paramètre $p\in]0,1[$. On pose $\tau_1=\inf\{n\in\mathbb{N}^*\mid X_n=1\}$ et $\tau_{k+1}=\inf\{n>\tau_k\mid X_n=1\}$.

1. Montrer que τ_k sont des t.a. adaptés à la filtration engendrée par X.
2. Donner la loi de τ_k.

Réponse :

Posons, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $\mathcal{F}_n=\sigma(X_1,\cdots,X_n)$.

1. **Montrer que τ_k sont des t.a. adaptés à la filtration engendrée par X :**
   Par récurrence,
   — (initialisation) Soit $m\in\mathbb{N}^*$, on a $(\tau_1\leqslant m)=\cup_{n=1}^{m}\ (X_n=1)\in\mathcal{F}_m$ donc τ_1 est un t.a.
   — (hérédité/transmission) Supposons que τ_k est un temps d'arrêt, alors pour $m\in\mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}(\tau_{k+1}\leqslant m)&=\cup_{j=1}^{m-1}\ [(\tau_k=j)\cup(\tau_{k+1}\leqslant m)]\\&=\cup_{j=1}^{m-1}\ [(\tau_k=j)\cup\cup_{n=j+1}^{m}\ (X_n=1)]\\&\in\mathcal{F}_m.\end{aligned}$$

   — (conclusion) $\forall k\in\mathbb{N}^*$, τ_k est un temps d'arrêt.
2. **Donner la loi de τ_k :** (ici $q=1-p$ et $C_n^k=0$ si $k>n$.)
   On a $\tau_k(\Omega)\subset\mathbb{N}^*$ et pour $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}P(\tau_k=n)&=P(X_1+\cdot\cdot+X_n=k\,;\ X_n=1)\\&=P(X_1+\cdot\cdot+X_{n-1}=k-1\,;\ X_n=1)\\&=P(X_1+\cdot\cdot+X_{n-1}=k-1)\times p \qquad \text{grâce à l'indépendance}\\&=C_{n-1}^{k-1}\,p^k\,q^{n-k}\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\tau_k \text{ suit la loi de Pascal (ou loi binomiale négative) de paramètre } k \text{ et } p}$ (si $k=1$, on retrouve la loi géométrique). il représente le nombre d'épreuves nécessaires pour avoir exactement k succès $X=1$.

Remarque : $\mathbb{E}\tau_k=\frac{k}{p}$ et $V(\tau_k)=\frac{kq}{p^2}$.

EXERCICE 9

Soit τ un temps d'arrêt sur une base $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}})$ tel que $\exists\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}^*$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$P\left(\tau \leqslant n + N/\mathcal{F}_n\right) > \varepsilon, \quad ps$$

Montrer que $P(\tau > nN) \leqslant (1-\varepsilon)^n$ et en déduire que $E\tau < \infty$.

Réponse :

On raisonne par récurrence.

✓ $P\big(\tau > 0\big) \leqslant (1-\varepsilon)^0 = 1$.

✓ Supposons que $P(\tau > nN) \leqslant (1-\varepsilon)^n$, on a

$$\begin{aligned} P(\tau > (n+1)N) &= \mathbb{E}1_{(\tau>(n+1)N}1_{(\tau>nN)} = \mathbb{E}\left(1_{(\tau>nN+N)}/\mathcal{F}_{nN}\right)1_{(\tau>nN)} \\ &\leqslant (1-\varepsilon)P(\tau > nN) \leqslant (1-\varepsilon)^{n+1}. \end{aligned}$$

✓ $\forall n \in \mathbb{N},\ P(\tau > nN) \leqslant (1-\varepsilon)^n$.

On a aussi, $P(\tau = \infty) = 0$ donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\tau &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}\tau 1_{((n+1)N\geqslant\tau>nN)} \\ &\leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} (n+1)NP(\tau > nN) \\ &\leqslant N\sum_{n\in\mathbb{N}} (n+1)(1-\varepsilon)^n = N\frac{1}{\varepsilon} < \infty. \end{aligned}$$

EXERCICE 10

Soit τ un temps d'arrêt sur une base $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0})$. Montrer qu'il existe une suite décroissante de temps d'arrêts $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge simplement vers τ et vérifiant $\forall n$

$$\tau_n(\Omega) \subset \{k2^{-n}\ \ ;\ \ k \in \{1, \cdot\cdot, n2^n\}\} \cup \{+\infty\}.$$

Réponse :

Posons

$$\tau_n(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k}{2^n}\, 1_{\left(\frac{k-1}{2^n}<\tau\leqslant\frac{k}{2^n}\right)}(\omega) + (+\infty)\, 1_{(n<\tau)}(\omega)$$

On vérifie facilement que

✓ $\boxed{\tau(\omega) = 0 \implies \forall n,\ \tau_n(\omega) = 0}$,

✓ $\boxed{\tau_n(\Omega) \subset \{k2^{-n}\ \ ;\ \ k \in \{1, \cdot\cdot, n2^n\}\} \cup \{+\infty\}}$ et

✓ $\boxed{\forall \omega \in \Omega, \forall n \in \mathbb{N},\ \tau(\omega) \leqslant \tau_{n+1}(\omega) \leqslant \tau_n(\omega)}$.

Posons $\tau^*(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_n \tau_n = \lim_n \tau_n$, on a, τ^* est un t.a. tel que $\forall\omega \in \Omega$, $\tau(\omega) \leqslant \tau^*(\omega)$ et que $\tau(\omega) = 0 \implies \tau^*(\omega) = 0$. Supposons que $\tau(\omega) < \tau^*(\omega)$ donc $0 < \tau(\omega) < \infty$, notons $N = \lceil\tau(\omega)\rceil \in \mathbb{N}^*$, ainsi, $\forall n \geqslant N$, $\exists k_n(\omega) \in \{1, \cdots, n2^n\}$ tel que $\frac{k^n(\omega)-1}{2^n} < \tau(\omega) \leqslant \frac{k^n(\omega)}{2^n}$. Par suite $\tau_n(\omega) = \frac{k^n(\omega)}{2^n}$ et $0 \leqslant \tau_n(\omega) - \tau(\omega) < \frac{1}{2^n}$. Tendons $n \to \infty$ pour obtenir $\tau(\omega) = \tau^*(\omega)$, absurde. Donc $\tau(\omega) = \tau^*(\omega)$. Ce qui montre $\boxed{\text{la convergence simple de la suite } (\tau_n)_n \text{ vers } \tau}$.

Soit $t \geqslant 0$.

$$\begin{aligned} (\tau_n \leqslant t) &= \bigcup_{k=1}^{n2^n} \left(\frac{k-1}{2^n} < \tau \leqslant \frac{k}{2^n}\,;\,\frac{k}{2^n} \leqslant t\right) \\ &= \bigcup_{\substack{1\leqslant k\leqslant n2^n/ \\ \frac{k}{2^n}\leqslant t}} \left[\left(\tau \leqslant \frac{k}{2^n}\right)\bigcap\left(\tau \leqslant \frac{k-1}{2^n}\right)^c\right] \in \mathcal{F}_t. \end{aligned}$$

Donc $\boxed{(\tau_n)_n \text{ est une suite de temps d'arrêt}}$. □

EXERCICE 11

Soit τ un temps d'arrêt défini sur l'espace filtré $\Big(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_n\Big)$. Pour $n \in \overline{\mathbb{N}}$, posons

$$g(n) = \inf\{k \in \mathbb{N}\ \ ;\ \ (\tau = n) \in \mathcal{F}_k\}.$$

Montrer que $g(\tau)g \circ \tau$ est un temps d'arrêt majoré par τ.

Réponse :

On a $g(n) \leqslant n$, car $n \in \{k \in \mathbb{N}\ \ ;\ \ (\tau = n) \in \mathcal{F}_k\}$ puise τ est temps d'arrêt, donc $g(\tau) \leqslant \tau$. D'autre part,

$$\begin{aligned} \big(g(\tau) = k\big) &= \bigcup_{n\in\overline{\mathbb{N}}} \big(g(n) = k, \tau = n\big) \\ &= \bigcup_{\substack{0\leqslant n/ \\ g(n)=k}} \big(\tau = n\big) \in \mathcal{F}_k. \end{aligned}$$

EXERCICE 12

Soit $\mathcal{U} \subset L^1$ tel que $\exists p > 1$, $\sup_{X\in\mathcal{U}} \mathbb{E}|X|^p < \infty$. Montrer que $\mathcal{U}$ est uniformément intégrable.

Réponse : Soit $c > 0$, on a

$$\sup_{X\in\mathcal{U}} \mathbb{E}\,|X|\,1_{(|X|>c)} \leqslant \frac{1}{c^{p-1}} \sup_{X\in\mathcal{U}} \mathbb{E}\,|X|^p \longrightarrow_{c\to+\infty} 0.$$

EXERCICE 13

Soit $\mathcal{U} \subset L^1$ uniformément intégrable. Montrer que

$$\mathcal{U}' = \{\mathbb{E}\,(X/\mathcal{B})\,;\;\; X \in \mathcal{U}, \mathcal{B} \text{ sous tribus de } \mathcal{F}\} \quad \text{est uniformément intégrable.}$$

Réponse :

Soit $c > 0$, on a

$$\begin{aligned}
&\sup_{\substack{X\in\mathcal{U}\\ \mathcal{B}\text{ sous tribus de }\mathcal{F}}} \mathbb{E}\,|\mathbb{E}\,(X/\mathcal{B})|\,1_{(|\mathbb{E}(X/\mathcal{B})|>c)}\\
&\leqslant \sup_{\substack{X\in\mathcal{U}\\ \mathcal{B}\text{ sous tribus de }\mathcal{F}}} \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\,(|X|\,/\mathcal{B})\,1_{(\mathbb{E}(|X|/\mathcal{B})>c)}\right]\\
&\leqslant \sup_{\substack{X\in\mathcal{U}\\ \mathcal{B}\text{ sous tribus de }\mathcal{F}}} \mathbb{E}\left[|X|\,1_{(\mathbb{E}(|X|/\mathcal{B})>c)}\right]\\
&\leqslant \sup_{X\in\mathcal{U}} \mathbb{E}\left[|X|\,1_{\left(|X|>\sqrt{c}\right)}\right] + \sqrt{c}\sup_{\substack{X\in\mathcal{U}\\ \mathcal{B}\text{ ss trib }\mathcal{F}}} \mathbb{E}\left[1_{(\mathbb{E}(|X|/\mathcal{B})>c)}\right]\\
&\leqslant \sup_{X\in\mathcal{U}} \mathbb{E}\left[|X|\,1_{\left(|X|>\sqrt{c}\right)}\right] + \sqrt{c}\sup_{\substack{X\in\mathcal{U}\\ \mathcal{B}\text{ ss trib}\mathcal{F}}} \frac{\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\,(|X|\,/\mathcal{B})\right]}{c}\\
&\leqslant \sup_{X\in\mathcal{U}} \mathbb{E}\left[|X|\,1_{\left(|X|>\sqrt{c}\right)}\right] + \frac{\sup_{X\in\mathcal{U}}\mathbb{E}\,|X|}{\sqrt{c}}\\
&\longrightarrow_{c\to+\infty} 0.
\end{aligned}$$

□

EXERCICE 14

Soit $(X_k)_k$ une suite iid de variable de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. Montrer que cette suite est U.I. mais ne possède pas une sous suite qui converge dans L^1.

Réponse :

On a $\sup_k \mathbb{E}\,|X_k|^2 = p < \infty$ donc $\mathcal{U} \overset{\text{def}}{=} \{X_k \;\;;\;\; k \in \mathbb{N}\}$ est U.I.

Supposons qu'il existe $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $(Y_n \overset{\text{def}}{=} X_{\phi(n)})_n$ converge dans L^1 vers une v.a.Y. Donc $\mathbb{E}\,|Y_{n+1} - Y_n|$ converge vers 0. Mais

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\,|Y_{n+1} - Y_n| &= P\left(|Y_{n+1} - Y_n|\right)\\
&= P\left(Y_{n+1} = 1\,;\; Y_n = 0\right) + P\left(Y_{n+1} = 0\,;\, Y_n = 1\right)\\
&= 2p(1-p) \qquad\qquad \text{grâce à iid et ...Bernoulli.}
\end{aligned}$$

Ainsi $p(1-p) = 0$, absurde. Aucune sous suite de $(X_k)_k$ ne converge dans L^1 (ni presque sure !).

EXERCICE 15

Soit X une v.a. réelle intégrable ou positive et Y une v.a. à valeurs dans un espace mesurable $(E, \mathcal{E})$ toutes les deux sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Montrer qu'il existe une fonction $g : (E, \mathcal{E}) \to \overline{\mathbb{R}}$ mesurable telle que

$$\mathbb{E}\Big(X/Y\Big) = g(Y).$$

Réponse :

On va montrer le résultat suivant qui est plus général :

> **Lemme 1**
> *Si Z est une v.a.* ***réelle*** *$\sigma(Y)$-mesurable alors il existe une fonction $g : (E, \mathcal{E}) \to \overline{\mathbb{R}}$ mesurable telle que $Z = g(Y) \overset{\text{def}}{=} g \circ Y$.*

Pour cela, on utilise la méthode standard :

1. **Cas $Z = 1_A$** (avec $A \in \sigma(Y)$) donc il existe $C \in \mathcal{E}$ tel que $A = Y^{-1}(C)$, ainsi $Z = 1_C(Y)$ donc on prend dans ce cas $g = 1_C$ qui à valeurs $\{0, 1\}$ et $(\mathcal{E}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$-mesurable.
2. **Cas Z étagée positive**, donc il existe $d \in \mathbb{N}^*$, $a_1, \cdots, a_d \in \mathbb{R}_+$, $A_1, \cdots, A_d \in \sigma(Y)$ tels que $Z = \sum_{i=1}^d a_i 1_{A_i}$. D'après le cas précédent, $\forall i = 1 \cdot\cdot d$, il existe $g_i : (E, \mathcal{E}) \to \mathbb{R}_+$ mesurable telle que $1_{A_i} = g_i(Y)$. Avec $g = \sum_{i=1}^d a_i g_i$, on a $Z = g(Y)$ et $g : (E, \mathcal{E}) \to \mathbb{R}_+$ mesurable.
3. **Cas Z positive**, d'après le théorème d'approximation, il existe une suite croissante $(Z_n)_n$ de fonctions étagées positives $\sigma(Y)$-mesurables qui converge simplement vers Z. Mais, d'après le cas précédent, $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe $g_n : (E, \mathcal{E}) \to \mathbb{R}_+$ mesurable telle que $Z_n = g_n(Y)$. Posons $g = \liminf_{n\to\infty} g_n$, on a $g : (E, \mathcal{E}) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ mesurable et $Z = g(Y)$.
4. **Cas Z générale**, d'après le cas précédent, il existe $g^{\pm} : (E, \mathcal{E}) \to \overline{\mathbb{R}}_+$ mesurable et $Z^{\pm} = g^{\pm}(Y)$. Posons $g \overset{\text{def}}{=} g^+ 1_{(g^-=0)} - g^- 1_{(g^+=0)}$, on a $g : (E, \mathcal{E}) \to \overline{\mathbb{R}}$ mesurable et $Z = g(Y)$.

EXERCICE 16

Soit X et Y deux variables à valeurs respectivement dans E et F et $\mathcal{B}$ une sous tribu de $\mathcal{F}$ telle que X est indépendante de $\mathcal{B}$ et que Y est $\mathcal{B}-$mesurable. Soit $f : E \times F \to \overline{\mathbb{R}}_+$ mesurable.

Montrer que
$$\mathbb{E}\Big(f(X,Y)/\mathcal{B}\Big) = g(Y)$$
où $g(s) = \mathbb{E}f(X,s)$.

Réponse :

D'après le théorème de Tonelli-Fubini, $g : F \to \overline{\mathbb{R}}_+$ est mesurable donc $g(Y)$ est $\sigma(Y)$-mesurable donc $\mathcal{B}$-mesurable.

D'autre part, soit $A \in \mathcal{B}$ et posons $Z = 1_A$ donc (Y,Z) est $\mathcal{B}$-mesurable d'où X est indépendante de (Y,Z), ainsi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}f(X,Y)Z &= \int_{E\times F\times\mathbb{R}} f(x,y)z\, P^{(X,Y,Z)}(\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z) \\
&= \int_{E\times F\times\mathbb{R}} f(x,y)z\, P^{(Y,Z)}(\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z)P^X(\mathrm{d}x) \qquad \text{indépendance!} \\
&= \int_{F\times\mathbb{R}} z\int_E f(x,y)\, P^X(\mathrm{d}x)P^{(Y,Z)}(\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z) \qquad \text{Tonelli-Fubini} \\
&= \int_{F\times\mathbb{R}} z\mathbb{E}f(X,y)\; P^{(Y,Z)}(\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z) = \int_{F\times\mathbb{R}} zg(y)\; P^{(Y,Z)}(\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z) \\
&= \mathbb{E}g(Y)Z.
\end{aligned}$$

Ainsi,
$$\mathbb{E}\Big(f(X,Y)/\mathcal{B}\Big) = g(Y)$$

EXERCICE 17

Soit X et Y deux v.a. telles que $X \geq 0$ et $Y(\Omega) = \{y_i\ ;\ i \in \mathbb{N}\}$ est dénombrable. Soit $I = \{i/P(Y = y_i) \neq 0\}$.

Montrer que
$$\mathbb{E}\Big(X/Y\Big) = \sum_{i\in I} \frac{\mathbb{E}X1_{(Y=y_i)}}{P(Y=y_i)}\, 1_{(Y=y_i)}.$$

Étudiez le cas $Y = 1_A$.

Réponse :

Posons $g(z) == \sum_{i\in I} \frac{\mathbb{E}X1_{(Y=y_i)}}{P(Y=y_i)}\; 1_{y_i}(z)$. On a g est borélienne donc $g(Y)$ est $\sigma(Y)-$mesurable.

Soit $A \in \sigma(Y)$ donc il existe $J \subset \mathbb{N}$ tel que
$$A = \bigcup_{n\in J}(Y = n)$$
ainsi
$$\mathbb{E}X1_A = \sum_{n\in J} \mathbb{E}X1_{(Y=n)} = \sum_{n\in J\cap I} \mathbb{E}X1_{(Y=n)}$$
et aussi
$$\mathbb{E}g(Y)1_A = \sum_{n\in J\cap I} g(n)P(Y=n) = \sum_{n\in J\cap I} \mathbb{E}X1_{(Y=n)}.$$

EXERCICE 18

Soit $(X, Y_1, \cdots, Y_d)$ un vecteur gaussien. Montrer qu'il existe des réels $\lambda_0, \cdots, \lambda_d$ tels que, avec $Y_0 = 1$,
$$\mathbb{E}\Big(X/Y_1,\cdots,Y_d\Big) = \sum_{i=0}^{d} \lambda_i Y_i.$$

Réponse :

Notons $E \overset{\text{def}}{=} vect_{\mathbb{R}}\{Y_0,\cdots,Y_d\}$. Soit $\delta = \inf\{\sqrt{\mathbb{E}\left|Z-X\right|^2}\ ;\quad Z \in E\}$, on a $0 \leqslant \delta \leqslant \sqrt{\mathbb{E}\left|X\right|^2} \overset{\text{def}}{=} \sigma_X < +\infty$.

Soit $(Z_n)_n$ une suite d'éléments de E telle que $\sqrt{\mathbb{E}\left|Z_n - X\right|^2}$ décroit vers δ. D'après le théorème de la médiane, on a
$$\mathbb{E}\left|Z_n - Z_m\right|^2 \leqslant 2\mathbb{E}\left|X - Z_n\right|^2 + 2\mathbb{E}\left|X - Z_m\right|^2 - 4\mathbb{E}\left|X - \frac{Z_n+Z_m}{2}\right|^2$$

Soit $\varepsilon > 0$, soit $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geqslant N \implies \mathbb{E}\left|X - Z_n\right|^2 < \delta^2 + \frac{\varepsilon^2}{4}$ et puisque $\frac{Z_n+Z_m}{2} \in E$, on a $\forall n \geqslant N$,
$$\sqrt{\mathbb{E}\left|Z_n - Z_m\right|^2} < \varepsilon.$$

Ainsi $(Z_n)_n$ une suite de Cauchy dans l'espace de dimension finie E muni du produit scalaire $\langle T,S\rangle \overset{\text{def}}{=} \mathbb{E}\,TS$. **Donc** il existe $Z \in E$ tel que $\sqrt{\mathbb{E}\left|Z_n - Z\right|^2} \to 0$ et par conséquent $\sqrt{\mathbb{E}\left|Z - X\right|^2} = \delta$ et $\forall Y \in E$, $\mathbb{E}\left(Z - X\right)Y = 0$. En particulier, il existe $\lambda_0,\cdots,\lambda_d \in \mathbb{R}$ tels que $Z = \sum_{i=0}^{d} \lambda_i Y_i$, $\mathbb{E}\left(Z - X\right) = 0$ et $\forall i = 1\cdot\cdot d \in E$, $\mathbb{E}\left(X - Z\right)Y_i = 0$.

Or $(X-Z, Y_1, \cdots, Y_d)$ est un vecteur gaussien donc $X-Z$ et $(Y_1, \cdots, Y_d)$ sont indépendants et Z est $\sigma(Y_1, \cdots, Y_d)$-mesurable, d'où

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big(X/Y_1, \cdots, Y_d\Big) &= Z + \mathbb{E}\Big(X - Z/Y_1, \cdots, Y_d\Big) \\ &= Z + \mathbb{E}\Big(X - Z\Big) \\ &= Z = \sum_{i=0}^{d} \lambda_i Y_i.\end{aligned}$$

EXERCICE 19

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux sous tribus de $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et X une v.a. intégrable ou positive. Montrer que si $\mathcal{B}$ est indépendante de $\sigma(X, \mathcal{B}')$ alors

$$\mathbb{E}\Big(X/\sigma(\mathcal{B}, \mathcal{B}')\Big) = \mathbb{E}\Big(X/\mathcal{B}'\Big)$$

Réponse :

Posons $\mathcal{B}\mathcal{B}' = \{A \cap B, \quad A \in \mathcal{B} \text{ et } B \in \mathcal{B}'\}$ ce dernier contient $\{\emptyset, \Omega\}$, stable par intersection ($\pi-$système) et $\forall A \in \mathcal{B}$, $\forall B \in \mathcal{B}'$, $(A \cap B)^c = (A^c \cap B) \bigcup (\Omega \cap B^c)$ c-à-d le complémentaire d'un élément de $\mathcal{B}\mathcal{B}'$ est la réunion (finie) disjointe de deux éléments de $\mathcal{B}\mathcal{B}'$. Donc $\mathcal{B}\mathcal{B}'$ est une semi-algèbre sur Ω.

On a aussi $\sigma(\mathcal{B}, \mathcal{B}') \overset{\text{def}}{=} \sigma(\mathcal{B} \cup \mathcal{B}') = \sigma(\mathcal{B}\mathcal{B}')$.

Posons $Z = \mathbb{E}\big(X/\mathcal{B}'\big)$, on a donc Z est $\mathcal{B}'-$mesurable donc $\sigma(\mathcal{B}\mathcal{B}')-$mesurable et $\forall B \in \mathcal{B}'$, $\quad \mathbb{E}X1_B = \mathbb{E}Z1_B$.

Notons

$$\mathcal{M} = \{C \in \sigma(\mathcal{B}\mathcal{B}') \; tq \; \mathbb{E}X1_C = \mathbb{E}Z1_C\}$$

On a $\mathcal{M}$ est une classe monotone contenant la semi algèbre $\mathcal{B}\mathcal{B}'$ (Comment ? on utilise l'indépendance) et puisqu'elle est stable par réunion disjointe alors elle contient l'algèbre engendrée par la semi algèbre $\mathcal{B}\mathcal{B}'$ et d'après le théorème des classes monotones, on a $\mathcal{M} = \sigma(\mathcal{B}\mathcal{B}')$ et par suite $\forall B \in \sigma(\mathcal{B}\mathcal{B}')$, $\quad \mathbb{E}X1_B = \mathbb{E}Z1_B$. CQFD

2 Martringales

EXERCICE 20

Soit $\mathbb{T} \subset \mathbb{R}$ et $\Big(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_{t\in\mathbb{T}}, P\Big)$ un espace probabilisé filtré. Soit $(Z_t)_{t\in\mathbb{T}}$ une suite de v.a. intégrables définie sur $\Big(\Omega, \mathcal{F}\Big)$ et adaptée à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$. Montrer que si pour tout temps d'arrêt fini T, $\mathbb{E}Z_T = \mathbb{E}Z_0$ alors $(Z_t)_{t\in\mathbb{T}}$ est une martingale.

Réponse :

Il reste à montrer que $\forall t, s \in \mathbb{T}$ tels que $s < t$, on a $\mathbb{E}\left(Z_t/\mathcal{F}_t\right) = Z_s$ ps.

Pour cela, soit $A \in \mathcal{F}_s$ et $T = t1_A + s1_{A^c}$, On a T est un temps d'arrêt qui prend au plus deux valeurs. d'après l'hypothèse,

$$\mathbb{E}Z_T = \mathbb{E}Z_0 = \mathbb{E}Z_s$$

donc

$$\mathbb{E}Z_t 1_A = \mathbb{E}Z_s 1_A.$$

CQFD□

EXERCICE 21

Soit $X = (X_n)_n$ une suite de v.a. indépendantes et de même espérance m. On pose $S_n = \sum_{i=0}^{n} X_i$. Donner un condition nécessaire et suffisante pour que $(S_n)_n$ soit une sous martingale.

Réponse :

On a S_n est $\mathcal{F}_n-$mesurable avec $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \cdots, X_n)$ et $\mathbb{E}\big(S_{n+1}/\mathcal{F}_n\big) = S_n + \mathbb{E}\big(X_{n+1}/\mathcal{F}_n\big) = S_n + \mathbb{E}X_{n+1} = S_n + m$.

Donc $(S_n)_n$ est une sous martingale ssi $m \geqslant 0$.

EXERCICE 22

Soit $(X_k)_k$ une suite de v.a. indépendantes centrées de carré intégrables telle que $\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}X_k^2 < \infty$. Montrer que $\sum_{k=0}^{\infty} X_k$ converge p.s. et dans L^2.

Réponse :

Posons $S_n = \sum_{i=0}^{n} X_i$, On a $(S_n)_n$ est une martingale relativement à sa filtration naturelle. De plus $\sup_n \mathbb{E}\left|S_n\right|^2 \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}X_k^2 < \infty$. D'après le théorème de la convergence de Doob, On a $(S_n)_n$ converge presque surement et dans L^2

EXERCICE 23 (Inégalité de Kolmogorov)

Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a. indépendantes centrées de carré intégrables. Posons $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall a > 0$,

$$P(\sup_{j\leqslant n} |S_j| > a) \leqslant \frac{Var(S_n)}{a^2}.$$

Réponse :

On a $(S_n^2)_n$ est une sous martingale relativement à sa filtration naturelle (avec $S_0 \stackrel{\text{def}}{=} 0$). D'après l'inégalité maximale de Doob, On a

$$\begin{aligned} P(\sup_{j\leqslant n}|S_j| > a) &= P(\sup_{j\leqslant n} S_j^2 > a^2) \\ &\leqslant \frac{\mathbb{E}(S_n^2)}{a^2} = \frac{Var(S_n)}{a^2}. \end{aligned}$$

EXERCICE 24

Soit $(S_n)_n$ une sous martingale par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_n)_n$ de décomposition de Doob : $S_n = S_0 + M_n + A_n$.

Montrer que $\sup_n \mathbb{E}S_n^+ < \infty$ si et seulement si $\sup_n \mathbb{E}|M_n| < \infty$ et $\mathbb{E}A_\infty < \infty$.

Réponse :

On sait que $A_0 = M_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left([S_k - S_{k-1}]/\mathcal{F}_{k-1}\right)$$

$\Rightarrow$) On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}A_n &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left([S_k - S_{k-1}]/\mathcal{F}_{k-1}\right)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[S_k - S_{k-1}] = \mathbb{E}S_n - \mathbb{E}S_0 \end{aligned}$$

donc, d'après le théorème de Beppo-Levi, $\mathbb{E}A_\infty = \sup_n \mathbb{E}S_n - \mathbb{E}S_0 \leqslant \sup_n \mathbb{E}S_n^+ + \mathbb{E}S_0^- < \infty$. De plus $\sup_n \mathbb{E}|M_n| < \infty$

$$\begin{aligned} \sup_n &= \sup_n \mathbb{E}|S_n - S_0 - A_n| \leqslant \sup_n \mathbb{E}|S_n| + \mathbb{E}|S_0| + \mathbb{E}A_\infty \\ &\leqslant \sup_n \left(2\mathbb{E}S_n^+ - \mathbb{E}S_n\right) + \mathbb{E}|S_0| + \mathbb{E}A_\infty \leqslant \sup_n 2\mathbb{E}S_n^+ - \mathbb{E}S_0 + \mathbb{E}|S_0| + \mathbb{E}A_\infty \\ &\leqslant 2\sup_n \mathbb{E}S_n^+ - \mathbb{E}S_0 + \mathbb{E}|S_0| + \mathbb{E}A_\infty \leqslant 3\sup_n \mathbb{E}S_n^+ + 3\mathbb{E}S_0^- < \infty. \end{aligned}$$

$\Leftarrow$) On a

$$\begin{aligned} \sup_n \mathbb{E}S_n^+ &\leqslant \sup_n \mathbb{E}|S_n| \\ &\leqslant \ \mathbb{E}|S_0| + \mathbb{E}|A_\infty| + sup_n\mathbb{E}|M_n| < \infty. \end{aligned}$$

EXERCICE 25

Soit $(U_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées (iid) de loi uniforme sur $]0,1]$. Posons $M_0 = 1$ et $M_n = 2U_n\, X_{n-1}$ pour $n \geqslant 1$ et pour $n \geqslant 0$, $\mathcal{F}_n = \sigma(U_0, \cdots, U_n)$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(2^n \geqslant M_n > 0) = 1, \mathbb{E}\,|\log(M_n)| < \infty$ et calculer $\mathbb{E}\log(M_n)$.
2. Montrer que $M = (M_n)_n$ est une martingale.
3. Calculer le processus croissant $\langle M\rangle$ et discuter la convergence M dans L^2.
4. Pour $n \geqslant 0$, $Z_n = \log(M_n) - \mathbb{E}(\log(M_n))$. Montrer que $Z = (Z_n)_n$ est une martingale.
5. Étudier la convergence presque sûre de M et Z.
6. Discuter la convergence dans L^1.

Réponse : D'abord, on remarque que $\forall n$, $P(U_n \in]0,1[) = 1$.

1. On a
   - ✓ On a $(2^0 \geqslant M_0 = 1) = \Omega$ donc $P(M_0 > 0) = 1$, supposons que $P(2^n \geqslant M_n > 0) = 1$, donc $P(M_{n+1} = 0) \leqslant P(M_n = 0) + P(U_{n+1} = 0) = 0$ et $P(M_{n+1} > 2^{n+1}) = P(U_{n+1}M_n > 2^n) \leqslant P(M_n > 2^n) = 0$. On vient de montrer par récurrence que $\forall n$, $P(2^n \geqslant M_n > 0) = 1$.
   - ✓ On montre par récurrence que $\forall n \geqslant 1$, $M_n = 2^n U_n \cdots U_1$, donc $\log(M_n) = n\log 2 + \sum_{k=1}^{n} \log(U_k)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\,|\log(M_n)| \leqslant n\log 2 - \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\log(U_k) &= n\log 2 - n\mathbb{E}\log U_1 \\ &= n\log 2 - n\int_0^1 \log x\, dx \\ &= n\log 2 - n\left[x\log x - x\right]_0^1 \\ &= n\left(\log 2 + 1\right) < \infty. \end{aligned}$$

   - ✓ De même,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\log(M_n) &= n\log 2 + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\log(U_k) \\ &= n\left(\log 2 - 1\right). \end{aligned}$$

□

2. On a
   - ✓ D'après la question précédente, $\forall n$, $\mathbb{E}\,|M_n| = \mathbb{E}\, M_n \leqslant 2^n < \infty$.
   - ✓ Encore par récurrence, on montre que M_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable (M est adapté).

✓

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(M_{n+1}/\mathcal{F}_n\right) &= \mathbb{E}\left(2U_{n+1}M_n/\mathcal{F}_n\right)\\ &= 2M_n\mathbb{E}\left(U_{n+1}/\mathcal{F}_n\right)\\ &= 2M_n\mathbb{E}\,U_{n+1} = M_n.\end{aligned}$$

□

3. On a $\langle M\rangle_0 = 0$ (ou M_0^2...?! ici on prend $\langle M\rangle_0 = 0$) et pour $n \geqslant 1$

$$\begin{aligned}\langle M\rangle_n &= \langle M\rangle_0 + \sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left(\left[M_k^2 - M_{k-1}^2\right]/\mathcal{F}_{k-1}\right)\\ &= \langle M\rangle_0 + \sum_{k=1}^{n} M_{k-1}^2\,\mathbb{E}\left(\left[4U_k^2-1\right]/\mathcal{F}_{k-1}\right)\\ &= \langle M\rangle_0 + \sum_{k=1}^{n} M_{k-1}^2\,\mathbb{E}\left[4U_k^2-1\right] = \langle M\rangle_0 + \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{n-1} M_k^2.\end{aligned}$$

On a donc, $\mathbb{E}M_n^2 = \mathbb{E}\langle M\rangle_n + \mathbb{E}M_0^2 = \mathbb{E}\langle M\rangle_n + 1 \geqslant 1$. Ainsi, la martingale M converge dans L^2 si et seulement si $\sup_n \mathbb{E}M_n^2 < \infty$ si et seulement si $\mathbb{E}\langle M\rangle_\infty = \frac{1}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{E}\,M_k^2 = \infty < \infty$. D'où la martingale M ne converge pas dans L^2.

4. D'après ce qui précédent, $(Z_n)_n$ est adapté (car $(M_n)_n$ l'est aussi) et intégrable. De plus $Z_n = \log(2^n U_n \cdots U_1) - n(\log 2 - 1) = \sum_{k=1}^{n}(\log(U_k)+1)$ (Attention au cas $n=0$, à traiter tout seul !)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(Z_{n+1}/\mathcal{F}_n\right) &= Z_n + \mathbb{E}\left(\left(\log(U_{n+1})+1\right)/\mathcal{F}_n\right)\\ &= Z_n + 1 + \mathbb{E}\log(U_{n+1})\\ &= Z_n + 1 + \mathbb{E}\log(U_1) = Z_n.\end{aligned}$$

□

5. Selon les question 1. et 2., on $-M$ est une martingale (donc sous martingale) négative, ainsi $\sup_n \mathbb{E}(-M_n)^+ = 0$ et d'après le théorème de la convergence de Doob, $(M_n)_n$ converge presque surement vers $M_\infty \overset{\text{def}}{=} \liminf_n M_n \in L^1$.
D'autre part, On a $\mathbb{E}Z_n = 0$ et

$$\begin{aligned}\mathbb{E}Z_n^2 &= \sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left(\log(U_k)+1\right)^2 = n\mathbb{E}\left(\log(U_1)+1\right)^2\\ &= n\left(\mathbb{E}\log^2(U_1) + 2\mathbb{E}\log(U_1) + 1\right) = n\left(\mathbb{E}\log(U_1)^2 - 1\right)\\ &= n\left(\int_0^1 \log^2(x)\,dx - 1\right) = n\left(\int_0^\infty t^2 \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t - 1\right) = n.\end{aligned}$$

D'après le théorème central limite, on a $\frac{Z_n}{\sqrt{n}}$ converge en loi vers la loi normale centrée réduite donc $\forall s \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}\mathrm{e}^{is\frac{Z_n}{\sqrt{n}}} \to_n \mathrm{e}^{-\frac{s^2}{2}}$ et si $(Z_n)_n$ admet une sous suite qui converge presque surement , alors $\frac{Z_n}{\sqrt{n}}$ admet une sous suite converge presque surement vers 0 et par le théorème de Lebesgue, $\mathbb{E}\mathrm{e}^{is\frac{Z_n}{\sqrt{n}}}$ admet une sous suite qui converge vers 1. Ainsi, $\forall s \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-\frac{s^2}{2}} = 1$, absurde. Donc $(Z_n)_n$ n' a pas de sous suite qui converge presque surement.

6. ✓ D'après ce qui précédent, $(Z_n)_n$ ne possède pas une sous suite qui converge dans L^1, sinon elle possédera une sous suite qui converge presque surement.
   ✓ Supposons que $(M_n)_n$ converge dans L^1, alors

$$\begin{aligned}0 = \lim_n \mathbb{E}\left|M_{n+1} - M_n\right| &= \lim_n \mathbb{E}\left|2U_{n+1} - 1\right| M_n\\ &= \lim_n\left(\mathbb{E}\left|2U_{n+1}-1\right|\mathbb{E}M_n\right)\\ &= \mathbb{E}\left|2U_1 - 1\right|\mathbb{E}M_0 = \mathbb{E}\left|2U_1-1\right|\\ &= \int_0^1 \left|2x-1\right|\mathrm{d}x = \frac{1}{2}. \quad \text{Absurde.}\end{aligned}$$

EXERCICE 26

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P) = (\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*), P)$ avec $P(\{n\}) = \frac{1}{n(n+1)}$. Notons

$$\mathcal{F}_n = \{A \subset \mathbb{N}^* \;\;;\;\; A \cap [n+1, \infty[\in \{\emptyset, [n+1,\infty[\}\} \text{ et } X_n = (n+1)1_{[n+1,\infty[}.$$

Montrer que

1. $\mathcal{F}_n$ est une filtration et $(X_n)_n$ est $(\mathcal{F}_n)$-adapté.
2. $(X_n)_n$ est une $(\mathcal{F}_n)_n$-martingale.
3. $X_n \to X_\infty = \liminf_n X_n$ ps. Donner X_∞. A-t-on $X_n \to X_\infty$ dans L^1 ?

Réponse :

1. ✓ On a $\emptyset \in \mathcal{F}_n$,
   ✓ Soit $A \in \mathcal{F}_n$, donc $A^c \cap [n+1,\infty[= [n+1,\infty[\setminus (A \cap [n+1,\infty[) \in \{\emptyset, [n+1,\infty[\}$ d'où $A^c \in \mathcal{F}_n$,
   ✓ Soit $(A_k)_k \in \mathcal{F}_n^{\mathbb{N}}$, posons $A = \cup_k A_k$, donc $A \cap [n+1,\infty[= \cup_k (A_k \cap [n+1,\infty[) \in \{\emptyset, [n+1,\infty[\}$, ainsi $A \in \mathcal{F}_n$. On vient de montrer que $\mathcal{F}_n$ est une sous tribu de $\mathcal{F}$.
   ✓ Soit $A \in \mathcal{F}_n$, donc $A \cap [n+2,\infty[= A \cap [n+1,\infty[\cap [n+2,\infty[\in \{\emptyset, [n+2,\infty[\}$ d'où $A \in \mathcal{F}_{n+1}$. Ainsi, $(\mathcal{F}_n)_n$ est une filtration dans $(\Omega, \mathcal{F}, P) = (\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*), P)$.

✓ Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $[n+1,\infty[\in \mathcal{F}_n$, donc $1_{[n+1,\infty[}$ est $\mathcal{F}_n$-mesurable, d'où $X_n=(n+1)1_{[n+1,\infty[}$ est $\mathcal{F}_n$-mesurable. Ainsi, $(X_n)_n$ est adapté.

2. $(X_n)_n$ est une $(\mathcal{F}_n)_n$-martingale.
   ✓ Pour tout entier n, X_n prend seulement deux valeurs 0 est $n+1$, donc il est adapté et intégrable.
   ✓ Soit $n\in\mathbb{N}$ et soit $A\in\mathcal{F}_n$, on a
   - $$\mathbb{E}\left(X_{n+1}1_A\right)=(n+2)P(A\cap[n+2,\infty[) = \begin{cases}(n+2)P([n+2,\infty[) & \text{si } A\cap[n+1,\infty[=[n+1,\infty[\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$
   - $$\mathbb{E}\left(X_{n}1_A\right)=(n+1)P(A\cap[n+1,\infty[) = \begin{cases}(n+1)P([n+1,\infty[) & \text{si } A\cap[n+1,\infty[=[n+1,\infty[\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

   Or
   $$\begin{aligned} jP([j,\infty[) &= j\sum_{k=j}^{\infty}P(\{k\})\\ &= j\sum_{k=j}^{\infty}P(\{k\}) = j\sum_{k=j}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1.\end{aligned}$$
   Ceci montre que
   $$\mathbb{E}\left(X_{n+1}1_A\right)=\mathbb{E}\left(X_{n}1_A\right)=\begin{cases}1 & \text{si } A\cap[n+1,\infty[=[n+1,\infty[\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$
   et par suite $(X_n)_n$ est une martingale.
3. On a $(X_n)_n$ est une martingale positive donc d'après le théorème de la convergence de Doop, $(X_n)_n\to X_\infty=\liminf_n X_n$ ps et $X_\infty\in L^1$. Mais le seul négligeable est $\emptyset$ donc $\forall k\in\mathbb{N}^*$, $X_n(k)\to_n X_\infty(k)$ et pour $n>k$, on a $X_n(k)=0$, d'où $X_\infty=0$. D'autre part, $\mathbb{E}\left|X_n-X_\infty\right|=1\not\to 0$. On n'a pas donc la convergence dans L^1.

EXERCICE 27

Posons $(\Omega,\mathcal{F},P)=([0,1[,\mathcal{B}_{[0,1[},\lambda=dt)$ et $\mathcal{F}_n=\sigma_\Omega(I_k^n=[\frac{k}{2^n},\frac{(k+1)}{2^n}[;\quad k\in\{0,\cdots,2^n-1\})$. Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne. On pose
$$X_n(\omega)=2^n\sum_{k=0}^{2^n-1}\left(f((k+1)2^{-n})-f(k2^{-n})\right)1_{I_k^n}(\omega).$$

1. Monter que $X=(X_n)_n$ est une martingale (par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_n$ la probabilité λ).
2. Montrer que X converge presque sûre vers une v.a. X_∞ intégrable.
3. Discuter la convergence de X dans L^1.
4. Montrer que pour tout $a,b\in[0,1]$ tels que $a<b$, $\quad\mathbb{E}\big(X_\infty\,1_{[a,b[}\big)=f(b)-f(a)$.
5. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$. À l'aide de 4. expliciter $X_\infty(\omega)$.

Réponse :

1.
On a $\forall n,\ X_n$ est $\mathcal{F}_n$-mesurable, d'autre part, soit $A\in\mathcal{F}_n$ donc il existe $d\in\mathbb{N}^*$ et $k_1\cdot\cdot k_d\in\{0,\cdot\cdot 2^n-1\}$ tels que $A=\bigcup_{i=1}^d I_{k_i}^n$ d'où, avec $\alpha_k^n=2^n\big(f(\frac{k+1}{2^n})-f(\frac{k}{2^n})\big)$,
$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big(X_{n+1}1_A\big)&=\sum_{i=1}^d\sum_{k=0}^{2^{n+1}-1}\alpha_k^{n+1}\,\lambda\big(I_k^{n+1}\cap I_{k_i}^n\big)\\ &=\sum_{i=1}^d\alpha_{2k_i}^{n+1}\,\lambda\big(I_{2k_i}^{n+1}\cap I_{k_i}^n\big)+\alpha_{2k_i+1}^{n+1}\,\lambda\big(I_{2k_i+1}^{n+1}\cap I_{k_i}^n\big)\\ &=\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{i=1}^d\alpha_{2k_i}^{n+1}+\alpha_{2k_i+1}^{n+1}\\ &=\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{i=1}^d 2^{n+1}\big(f(\frac{2k_i+1}{2^{n+1}})-f(\frac{2k_i}{2^{n+1}})\big)+2^{n+1}\big(f(\frac{2k_i+2}{2^{n+1}})-f(\frac{2k_i+1}{2^{n+1}})\big)\\ &=\sum_{i=1}^d\big(f(\frac{k_i+1}{2^n})-f(\frac{k_i}{2^n})\big)\end{aligned}$$
De même on montre que
$$\mathbb{E}\big(X_n1_A\big)=\sum_{i=1}^d\big(f(\frac{k_i+1}{2^n})-f(\frac{k_i}{2^n})\big)$$
CQFD

2. Puisque X est lipschitzienne alors $\forall\omega, |X_n(\omega)|\leqslant||f||_{lip}\overset{\text{def}}{=}\sup_{s\neq t}\frac{|f(t)-f(s)|}{|t-s|}$. Donc
$$\forall p\geqslant 1,\ \sup_n\mathbb{E}|X_n|^p\leqslant||f||_{lip}^p$$

D'après le théorème de convergence de Doob, on a $(X_n)_n$ converge vers $X_\infty\overset{\text{def}}{=}\liminf_n X_n$ presque surement et dans L^p pour tout $p\geqslant 1$.

3. Voir question 2.
4. On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $[\frac{[2^n a]}{2^n}, \frac{[2^n b]}{2^n}[\in \mathcal{F}_n$
donc $\mathbb{E}X_n 1_{[\frac{[2^n a]}{2^n}, \frac{[2^n b]}{2^n}[} = \mathbb{E}X_\infty 1_{[\frac{[2^n a]}{2^n}, \frac{[2^n b]}{2^n}[}$ mais

$$\begin{aligned}\mathbb{E}X_n 1_{[\frac{[2^n a]}{2^n}, \frac{[2^n b]}{2^n}[} &= \sum_{k=[2^n a]}^{[2^n b]-1} \left(f(\frac{k+1}{2^n}) - f(\frac{k}{2^n}) \right) \\ &= f(\frac{[2^n b]}{2^n}) - f(\frac{[2^n a]}{2^n})\end{aligned}$$

En tendant $n \to \infty$, et puisque f est continue, on obtient

$$\mathbb{E}\big(X_\infty\ 1_{[a,b[}\big) = f(b) - f(a).$$

c-à-d $f(b) - f(a) = \int_a^b X_\infty(s)ds$. CQFD
5. On a $\forall a, b \in [0, 1[$, $\mathbb{E}\big(X_\infty\ 1_{[a,b[}\big) = f(b) - f(a) = \int_a^b\ f'(s)ds = \mathbb{E}\big(f'\ 1_{[a,b[}\big)$.
Le th de classe monotone nous donne $\forall A \in \mathcal{F}$

$$\mathbb{E}\big((X_\infty - f')\ 1_A\big) = 0.$$

D'où $X_\infty = f'$ ps.

Exercice 28

Soit $(M_n)_n$ une sous martingale par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_n)$ sur un espace probabilisé $\big(\Omega, \mathcal{F}, P\big)$, soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{F}_m$ tel que $P(A) > 0$. Notons P_A la probabilité conditionnelle sachant A. On pose $M'_n = M_{m+n}$ et $\mathcal{F}'_n = \mathcal{F}_{m+n}$. Montrer que $(M'_n)_n$ est une sous martingale par rapport à la filtration $(\mathcal{F}'_n)$ dans l'espace probabilisé $\big(\Omega, \mathcal{F}, P_A\big)$ (et sa restriction à A par rapport à la filtration $(A \cap \mathcal{F}'_n)$ dans $\big(A, A \cap \mathcal{F}, P\big)$?).

Réponse :

On a $M'_n = M_{m+n}$ est $\mathcal{F}_{m+n} = \mathcal{F}'_n$-mesurable. Soit $C \in \mathcal{F}'_n$, on a

$$\mathbb{E}_{P_A}\left(M'_{n+1} 1_C\right) = \frac{\mathbb{E}\left(M_{m+n+1} 1_C 1_A\right)}{P(A)}$$

puisque $C \cap A \in \mathcal{F}_n$ et M_n est une martingale alors

$$\begin{aligned}&= \frac{\mathbb{E}\left(M_{m+n} 1_C 1_A\right)}{P(A)} \\ &= \mathbb{E}_{P_A}\left(M'_n 1_C\right).\end{aligned}$$

Ce qui prouve que $(M'_n)_n$ est une martingale.
Question : $\mathbb{E}_{P_A} X = \frac{\mathbb{E}X 1_A}{P(A)}$? ... méthode standard..

Exercice 29

Soit $X = (X_n)$ une martingale et posons $X_n^* = \max_{k \leqslant n}\ |X_n|$.
1. Montrer que pour tout $\alpha > 1$,

$$\mathbb{E}(X_n^* \wedge \alpha) \leqslant 1 + \mathbb{E}\big(|X_n|\ \log^+(X_n^* \wedge \alpha)\big) \qquad \text{avec } \log^+(x) = \begin{cases} \log(x) & \text{si } x > 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. En utilisant $t \log s \leqslant t \log t + \mathrm{e}^{-1} s$, montrer que

$$\mathbb{E}X_n^* \leqslant \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e} - 1}\ \big(1 + \mathbb{E}|X_n|\ \log^+(|X_n|)\big).$$

3. En déduire que si $\sup_n \mathbb{E}\big(|X_n|\ \log^+(|X_n|)\big) < \infty$ alors $(X_n)_n$ converge p.s. et dans L^1.

Réponse :

1. Montrer que pour tout $\alpha > 1$,

$$\mathbb{E}(X_n^* \wedge \alpha) \leqslant 1 + \mathbb{E}\big(|X_n|\ \log^+(X_n^* \wedge \alpha)\big) \qquad \text{avec } \log^+(x) = \begin{cases} \log(x) & \text{si } x > 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On a, d'après l'inégalité maximale de Doob, $\forall \alpha > 1$,

$$\int_1^\alpha \mathbb{E} 1_{(X_n^* \geqslant t)} dt = \int_1^\alpha P\left(X_n^* \geqslant t\right) dt \leqslant \int_1^\alpha \frac{\mathbb{E}|X_n| 1_{(X_n^* \geqslant t)}}{t} dt$$

et en utilisant le th. de Tonelli-Fibuni, on a

$$\mathbb{E}(X_n^* \wedge \alpha - 1) 1_{(X_n^* > 1)} \leqslant \mathbb{E}|X_n| 1_{(X_n^* \geqslant 1)} \ln(X_n^* \wedge \alpha) = \mathbb{E}|X_n| \ln^+(X_n^* \wedge \alpha)$$

donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_n^* \wedge \alpha - 1) &= \mathbb{E}(X_n^* \wedge \alpha - 1) 1_{(X_n^* > 1)} + \underbrace{\mathbb{E}(X_n^* \wedge \alpha - 1) 1_{(X_n^* \leqslant 1)}}_{\leqslant 0} \\ &\leqslant \mathbb{E}|X_n| 1_{(X_n^* \geqslant 1)} \ln(X_n^* \wedge \alpha) = \mathbb{E}|X_n| \ln^+(X_n^* \wedge \alpha)\end{aligned}$$

CQFD
2. On a, pour tous $s, t > 0$, $t \log s \leqslant t \log t + \mathrm{e}^{-1} s$ il suffit de montrer $\ln \frac{s}{t} \leqslant \mathrm{e}^{-1} \frac{s}{t}$ (une étude de fonction s'impose) et ceci donne, pour tous $s, t \geqslant 0$, $t \log^+ s \leqslant t \log^+ t + \mathrm{e}^{-1} s$.
D'après 2.

$$\mathbb{E}X_n^* \wedge \alpha \leqslant 1 + \mathbb{E}|X_n| \ln^+(|X_n|) + \mathrm{e}^{-1}\mathbb{E}X_n^* \wedge \alpha$$

On obtient

$$\mathbb{E}X_n^* \wedge \alpha \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1} \leqslant 1 + \mathbb{E}|X_n| \ln^+(|X_n|)$$

tendons $\alpha \to \infty$, pour avoir

$$\mathbb{E}X_n^* \leqslant \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}\left(1 + \mathbb{E}|X_n| \log^+(|X_n|)\right).$$

3. Si $\sup_n \mathbb{E}\big(|X_n| \log^+(|X_n|)\big) < \infty$ alors $\sup_n \mathbb{E}\big|X_n| < \infty$ et par le th de cv de Doob on a $(X_n)_n$ converge p.s. vers $X_\infty \overset{\mathrm{def}}{=} \liminf_{n\to\infty} X_n$. D'après la qu 2. $\mathbb{E}\sup_n |X_n| < \infty$ et le th de convergence dominée de Lebesgue, la convergence est dans L^1.

EXERCICE 30 (La loi du logarithme itéré)
Soit $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. réelles iid centrées de variance 1. On suppose que la fonction génératrice $g(t) = \mathbb{E}\mathrm{e}^{tX_1}$ est finies pour tout $t \in \mathbb{R}$. Posons $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Dans la suite $h(t) = \sqrt{2t\log(\log(t))}$ pour $t \geqslant \mathrm{e}$.

1. Montrer que $g(t) = 1 + \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)$ au voisinage de 0.
2. Montrer que $M_n = \frac{1}{g(t)^n}\,\mathrm{e}^{tS_n}$ est une martingale (positive).
3. Montrer que $\forall b_0, b, a, t > 0$,
$$P\big(\exists n \in [b_0, b] \cap \mathbb{N} \text{ tel que } S_n > a + n\frac{\log(g(t))}{t}\big) \leqslant \mathrm{e}^{-ta}.$$
4. Soit $s > 1$. Posons, pour $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $s^k \geqslant e$, $a_k = \frac{s}{2}h(s^k)$, $t_k = \frac{1}{s^k}h(s^k)$ et $c_k = \frac{s}{2} + s\frac{\log(g(t_k))}{t_k^2}$.
Montrer que la suite $(c_k)_k$ converge vers s et que
$$P\big(\exists n \in]s^k, s^{k+1}] \text{ tel que } S_n > h(n)\, c_k\big) \leqslant \frac{1}{k^s}(\log s)^{-s}.$$
5. En déduire que
$$\limsup_n \frac{S_n}{h(n)} \leqslant 1.$$

Réponse :
1) On a $\mathbb{E}e^{t|X_1|} \leqslant \mathbb{E}e^{tX_1} + \mathbb{E}e^{-tX_1} < \infty$. Soit $T > 0$ arbitraire et posons $\psi(t,\omega) = \mathrm{e}^{tX_1(\omega)}$.
On a $t \in [-T, T] \to \psi(t,\omega)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et

$$|\frac{\partial \psi}{\partial t}(t,\omega)| = |X_1\mathrm{e}^{tX_1(\omega)}| \leqslant \mathrm{e}^{(T+1)|X_1|(\omega)},$$
$$|\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}(t,\omega)| = |X_1^2\mathrm{e}^{tX_1(\omega)}| \leqslant \mathrm{e}^{(T+2)|X_1|(\omega)}$$

D'après le th de Lebesgue concernant la dérivabilité (appliquer 2fois) on a g est 2 fois dérivable sur $[-T, T]$ donc sur $\mathbb{R}$ puisque T est arbitraire. D'après le théorème de Taylor Young, on a $g(t) = 1 + \frac{1}{2}t^2 + o(t^2)$ au voisinage de 0, puisque $g(0) = 1, g'(0) = \mathbb{E}X_1 = 0$ et $g''(0) = \mathbb{E}X_1^2 = 1$.
2) Avec $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \cdots, X_n)$ et $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, on a M_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable puisque S_n l'est aussi. Et il est clair que M_n est positif. D'autre part,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(M_{n+1}/\mathcal{F}_n\right) &= \frac{1}{g(t)^{n+1}}\,\mathrm{e}^{tS_n}\mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{tX_{n+1}}/\mathcal{F}_n\right)\\ &= \frac{1}{g(t)^{n+1}}\,\mathrm{e}^{tS_n}\mathbb{E}\mathrm{e}^{tX_1} \qquad \text{car } (X_n)_n \text{ sont iid}\\ &= \frac{1}{g(t)^n}\,\mathrm{e}^{tS_n} = M_n.\end{aligned}$$

CQFD
3) On a, d'après l'inégalité maximale de Doob,

$$\begin{aligned}P\big(\exists n \in [b_0, b] \cap \mathbb{N} \text{ tel que } S_n > a + n\frac{\log(g(t))}{t}\big) &= P\big(\sup_{n\in[b_0,b]\cap\mathbb{N}} M_n > e^{ta}\big)\\ &\leqslant \mathbb{E}M_{[b]}\mathrm{e}^{-ta} = \mathrm{e}^{-ta}.\end{aligned}$$

4) On a $t_k = \frac{1}{s^k}h(s^k) = \sqrt{\frac{2\log(\log(s^k))}{\log(s^k)}\frac{\log(s^k)}{s^k}} \to 0$ quand $k \to \infty$. Donc, d'après la question 1), on a $c_k \to s$.
D'après la question 3),

$$P\big(\exists n \in [s^k, s^{k+1}] \cap \mathbb{N} \text{ tel que } S_n > a_k + n\frac{\log(g(t_k))}{t_k}\big) \leqslant \mathrm{e}^{-t_k a_k} \leqslant \frac{1}{k^s}(\log s)^{-s}.$$

Mais, pour $n \in [s^k, s^{k+1}]$, on a

$$
\begin{aligned}
a_k + n\frac{\log(g(t_k))}{t_k} &\leqslant h(s^k)\left[\frac{s}{2} + s\frac{\log(g(t_k))}{t_k^2}\,\frac{n}{s^{k+1}}\right] \\
&\leqslant h(n)c_k
\end{aligned}
$$

Donc

$$
\begin{aligned}
P\big(\exists n \in [s^k, s^{k+1}] \cap \mathbb{N} \text{ tel que } S_n > h(n)\, c_k\big) \\
&\leqslant P\big(\exists n \in [s^k, s^{k+1}] \cap \mathbb{N} \text{ tel que } S_n > a_k + n\frac{\log(g(t_k))}{t_k}\big) \\
&\leqslant \frac{1}{k^s}\,(\log s)^{-s}.
\end{aligned}
$$

5) D'après la question précédente,

$$
\begin{aligned}
P\Big(\sup_{n\in[s^k,s^{k+1}]\cap\mathbb{N}} \frac{S_n}{h(n)} > c_k\Big) \\
&= P\big(\exists n \in [s^k, s^{k+1}] \cap \mathbb{N} \text{ tel que } S_n > h(n)\, c_k\big) \\
&\leqslant \frac{1}{k^s}\,(\log s)^{-s}.
\end{aligned}
$$

Or la série $\sum_k \frac{1}{k^s}\,(\log s)^{-s}$ converge, donc d'après le lemme de Borel-Cantelli,

$$
P\left(\limsup_k \left(\sup_{n\in[s^k,s^{k+1}]\cap\mathbb{N}} \frac{S_n}{h(n)} > c_k\right)\right) = 0.
$$

Ainsi

$$
P\left(\bigcup_{s\in\mathbb{Q}\cap]1,\infty[} \limsup_k \left(\sup_{n\in[s^k,s^{k+1}]\cap\mathbb{N}} \frac{S_n}{h(n)} > c_k\right)\right) = 0.
$$

Soit $\omega \in \left(\bigcup_{s\in\mathbb{Q}\cap]1,\infty[} \limsup_k \left(\sup_{n\in[s^k,s^{k+1}]\cap\mathbb{N}} \frac{S_n}{h(n)} > c_k\right)\right)^c \bigcap \left(\limsup_n \frac{S_n}{h(n)} > 1\right)$.
Soit $\varepsilon = \varepsilon(\omega) > 0$ tel que

$$
\limsup_n \frac{S_n(\omega)}{h(n)} > 1 + \varepsilon
$$

Soit $s = s(\omega) \in \mathbb{Q}\cap]1,\infty[$ et $k_0 = k_0(\omega) \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$
\forall k \geqslant k_0,\ 1 + \frac{\varepsilon}{2} > c_k = c_k(s).
$$

Soit aussi $k_1 = k_1(\omega) \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$
\forall k \geqslant k_1,\ sup_{n\in[s^k,s^{k+1}]\cap\mathbb{N}} \frac{S_n}{h(n)} \leqslant c_k.
$$

Posons $k_2 = k_0 \vee k_1$, donc

$$
\forall k \geqslant k_2,\ sup_{n\in[s^k,s^{k+1}]\cap\mathbb{N}} \frac{S_n}{h(n)} \leqslant c_k \leqslant 1 + \frac{\varepsilon}{2}.
$$

d'où

$$
sup_{n\in[s^{k_2},\infty[\cap\mathbb{N}} \frac{S_n}{h(n)} \leqslant 1 + \frac{\varepsilon}{2}.
$$

Ainsi

$$
\limsup_n \frac{S_n}{h(n)} \leqslant 1 + \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{absurde donc ce } \omega \text{ n'existe pas.}
$$

Ce qui preuve que

$$
\left(\bigcup_{s\in\mathbb{Q}\cap]1,\infty[} \limsup_k \left(\sup_{n\in[s^k,s^{k+1}]\cap\mathbb{N}} \frac{S_n}{h(n)} > c_k\right)\right)^c \bigcap \left(\limsup_n \frac{S_n}{h(n)} > 1\right) = \emptyset
$$

c-à-d

$$
\left(\limsup_n \frac{S_n}{h(n)} > 1\right) \subset \bigcup_{s\in\mathbb{Q}\cap]1,\infty[} \limsup_k \left(\sup_{n\in[s^k,s^{k+1}]\cap\mathbb{N}} \frac{S_n}{h(n)} > c_k\right)
$$

et donc

$$
P\left(\limsup_n \frac{S_n}{h(n)} > 1\right) = 0.
$$

EXERCICE 31

Soit $(U_n)_n$ une suite de v.a. iid suivant la loi uniforme sur $[0,1]$, soit $a \in [0,1]$. On définit par récurrence la suite des v.a. $(X_n)_n$ par $X_0 = a$ et $X_{n+1} = U_{n+1} + (1 - U_{n+1})\, X_n^2$. Montrer que $(X_n)_n$ est une sous martingale positive qui converge presque sûrement vers une v.a. X intégrable. Donner X.

Réponse :

On a $\forall n,\ \ U_n \in [0,1]\, ps$ donc, par récurrence, on a $0 \leqslant X_n \leqslant 1$.
Posons $\mathcal{F}_n = \sigma(U_0, \cdot\cdot, U_n)$. On a par récurrence X_n est $\mathcal{F}_n-$mesurable et

$$
\mathbb{E}\,(X_{n+1}/\mathcal{F}_n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}X_n^2 \geqslant X_n
$$

donc $(X_n)_n$ est une sous martingale positive majorée par 1 d'où $\forall p \geqslant 1$, $\sup_n \mathbb{E}|X_n|^p \leqslant 1$, $(X_n)_n$ converge ps et dans L^p vers $X_\infty = \liminf_n X_n$. Or

$$\mathbb{E}X_{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathbb{E}X_n^2$$

donc

$$\mathbb{E}X_\infty = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathbb{E}X_\infty^2$$

d'où

$$\mathbb{E}\left[X_\infty - 1\right]^2 = 0$$

et par conséquent, $X_\infty = 1$ ps.

EXERCICE 32

Soit $(U_n)_n$ une suite de v.a. iid suivant la loi uniforme sur $[0,1]$, soit $a \in [0, \frac{\pi}{2}]$. On définit par récurrence la suite des v.a. $(X_n)_n$ par $X_0 = a$ et $X_{n+1} = U_{n+1}\sin(X_n)$. Montrer que $(2^n X_n)_n$ est une sur martingale positive. Donner la limite presque sûre de la suite $(X_n)_n$, s'elle existe.

Réponse :

Par récurrence, on montre que $0 \leqslant X_n \leqslant \frac{\pi}{2}$

Posons $\mathcal{F}_n = \sigma(U_0, \cdot\cdot, U_n)$. On a par récurrence $2^n X_n$ est $\mathcal{F}_n-$mesurable et

$$\mathbb{E}\left(2^{n+1}X_{n+1}/\mathcal{F}_n\right) = 2^{n+1}\frac{1}{2}\sin(X_n) \leqslant 2^n X_n$$

donc $(2^n X_n)_n$ est une sur martingale positive d'où $(2^n X_n)_n$ converge ps vers $\xi = \liminf_n 2^n X_n$. Donc

$$X_n \to 0 \text{ ps.}$$

EXERCICE 33 (Principe de superposition)

Soit deux sous martingale $(X_n)_n$ et $(Y_n)_n$ et T un temps d'arrêt tel que $X_T 1_{(T<\infty)} \leqslant Y_T 1_{(T<\infty)}$ presque sûre. Montrer que $M_n = X_n 1_{(T>n)} + Y_n 1_{(T\leqslant n)}$ est une sous martingale.

Réponse :

On a $\forall n$

1. $\mathbb{E}|M_n| \leqslant \mathbb{E}|X_n| + \mathbb{E}|Y_n| < \infty$
2. M_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable (somme et produit des mesurables)
3. $$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(M_{n+1}/\mathcal{F}_n\right) &= \mathbb{E}\left(X_{n+1}1_{(T>n+1)}/\mathcal{F}_n\right) + \mathbb{E}\left(Y_{n+1}1_{(T\leqslant n+1)}/\mathcal{F}_n\right)\\ &= \mathbb{E}\left(X_{n+1}/\mathcal{F}_n\right)1_{(T>n)} + \mathbb{E}\left(Y_{n+1}/\mathcal{F}_n\right)1_{(T\leqslant n)} + \mathbb{E}\left(Y_T - X_T 1_{(T=n+1)}/\mathcal{F}_n\right)\\ &\geqslant M_n \qquad \text{CQFD.}\end{aligned}$$

3 Mouvement brownien

EXERCICE 34

Soit $(B_t)_{t\geqslant 0}$ et $(W_t)_{t\geqslant 0}$ deux mouvements browniens indépendants et soit $\rho \in [0,1]$. Montrer que $(Z_t = \rho B_t + \sqrt{1-\rho^2}W_t)_{t\geqslant 0}$ est un mouvement brownien.

Réponse : On a

✓ $(Z_t)_t$ est un processus continue.

✓ $(Z_t)_t$ est un processus gaussien car $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall t_1, \cdots, t_n \geqslant 0$, $\forall a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$

$$\sum_{i=1}^n a_i Z_{t_i} = \overbrace{\sum_{i=1}^n \rho a_i B_{t_i}}^{=X} + \underbrace{\sum_{i=1}^n \sqrt{1-\rho^2}a_i W_{t_i}}_{=Y}$$

On a X et Y deux variables gaussiennes indépendantes donc $X+Y$ est gaussienne.

✓ Soient $s, t \geqslant 0$ tel que $s \leqslant t$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(Z_t Z_s\right) &= \rho^2\mathbb{E}\left(B_t B_s\right) + (1-\rho^2)\mathbb{E}\left(W_t W_s\right) + \rho\sqrt{1-\rho^2}\mathbb{E}\left(B_t W_s\right) + \rho\sqrt{1-\rho^2}\mathbb{E}\left(B_s W_t\right)\\ &= s \qquad \text{n'oubliez pas que } B \text{ et } W \text{ sont indépendantes. CQFD .}\end{aligned}$$

EXERCICE 35

Soit $(B_t)_{t\geqslant 0}$ un mouvement brownien et soit $t, s \geqslant 0$.

Calculez $\mathbb{E}[B_s B_t^2]$, $\mathbb{E}[B_t/Bs]$, $\mathbb{E}[\int_0^t e^{B_s}ds]$ et $\mathbb{E}[e^{\gamma B_t}\int_0^t e^{\alpha B_s}ds]$.

Réponse :

✓

$$\mathbb{E}\left[B_s B_t^2\right] = \begin{cases}\mathbb{E}\left[\left(B_s - B_t\right)B_t^2\right] + \mathbb{E}\left[B_t^3\right] = 0 & \text{si } s \geqslant t\\ \mathbb{E}\left[B_s\left(B_t - B_s\right)^2\right] + 2\mathbb{E}\left[B_s^2\left(B_t - B_s\right)\right] + \mathbb{E}\left[B_s^3\right] = 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

✓

$$\mathbb{E}\left[B_t/B_s\right] = \begin{cases}B_s + \mathbb{E}[B_t - B_s/B_s] = B_s & \text{si } t \geqslant s\\ \frac{t}{s}B_s & \text{sinon}\end{cases}$$

- Méthode 1 :

On a (B_t, B_s) est un couple gaussien, donc d'après le cours il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\mathbb{E}\left[B_t/B_s\right] = a + b\, B_s$. D'où

$$(\star)\mathbb{E}B_t = \mathbb{E}(a + b\, B_s) \text{ donc } a = 0$$

$$(\star)\mathbb{E}B_tB_s = \mathbb{E}(a + b\, B_s)B_s \text{ donc } t \wedge s = bs \text{ d'où } b = \frac{t \wedge s}{s}.$$

• $\boxed{\text{Méthode 2 :}}$

Il reste seulement à montrer le deuxième cas avec $t > 0$.

Posons $s_0 = \frac{1}{s}$, $t_0 = \frac{1}{t}$ et $W_r = \begin{cases} rB_{\frac{1}{r}} & \text{si } r > 0 \\ 0 & \text{si } r = 0. \end{cases}$

On a $s_0 < t_0$ et $(W_r)_r$ est un mouvement brownien. D'après le premier cas $\mathbb{E}\left[W_{t_0}/W_{s_0}\right] = W_{s_0}$, mais $\sigma(B_s) = \sigma(W_{s_0})$, d'où $\mathbb{E}\left[t_0B_t/B_s\right] = s_0B_s$ ainsi

$$\mathbb{E}\left[B_t/B_s\right] = \frac{s_0}{t_0}B_s = \frac{t}{s}B_s.$$

✓

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\int_0^t e^{B_s} ds\right] &= \int_0^t e^{\frac{s}{2}}\, \underbrace{\mathbb{E}\left[e^{B_s - \frac{s}{2}}\right]}_{=1} ds \\ &= 2(e^{\frac{t}{2}} - 1)\end{aligned}$$

✓

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[e^{\gamma B_t} \int_0^t e^{\alpha B_s} ds\right] &= e^{\frac{\gamma^2}{2}t} \int_0^t e^{\frac{\alpha^2}{2}s}\mathbb{E}\left[e^{\gamma B_t - \frac{\gamma^2}{2}t} e^{\alpha B_s - \frac{\alpha^2}{2}s}\right] ds \\ &= e^{\frac{\gamma^2}{2}t} \int_0^t e^{\frac{\alpha^2}{2}s}\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(e^{\gamma B_t - \frac{\gamma^2}{2}t}/\mathcal{F}_s\right) e^{\alpha B_s - \frac{\alpha^2}{2}s}\right] ds \\ &= e^{\frac{\gamma^2}{2}t} \int_0^t e^{\frac{\alpha^2}{2}s}\mathbb{E}\left[e^{\gamma B_s - \frac{\gamma^2}{2}s} e^{\alpha B_s - \frac{\alpha^2}{2}s}\right] ds \\ &= e^{\frac{\gamma^2}{2}t} \int_0^t e^{\frac{\alpha^2 + 2\gamma\alpha}{2}s}\, \underbrace{\mathbb{E}\left[e^{(\alpha+\gamma)B_s - \frac{(\alpha+\gamma)^2}{2}s}\right]}_{=1} ds \\ &= \begin{cases} e^{\frac{\gamma^2}{2}t} \times \frac{2}{\alpha^2 + 2\alpha\gamma} \times \left(e^{\frac{\alpha^2+2\alpha\gamma}{2}t} - 1\right) & \text{si } \alpha^2 + 2\alpha\gamma \neq 0 \\ te^{\frac{\gamma^2}{2}t} & \text{sinon} \end{cases}\end{aligned}$$

Dans ces deux derniers, on a utilisé que $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\left(M_t \overset{\text{def}}{=} e^{\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2}t}\right)_t$ est une martingale. Donc $\mathbb{E}M_t = \mathbb{E}M_0 = 1$.

EXERCICE 36

Soit $(B_t)_{t \geqslant 0}$ un mouvement brownien. Montrer que $(Z_t = B_t - \int_0^t \frac{B_s}{s}\, ds)_{t \geqslant 0}$ est un mouvement brownien.

Réponse :

✓ D'abord, on a

$$\int_0^t \mathbb{E}\left|\frac{B_s}{s}\right| ds = E\left|B_1\right| \int_0^t \frac{1}{\sqrt{s}}\, ds = \frac{4}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{t} < \infty \qquad \text{car } B_s = \sqrt{s}B_1 \text{ en loi}$$

donc le processus Z_t est bien défini.

✓ Soit $d \in \mathbb{N}^*$, $t_1, \cdots, t_d \geqslant 0$, $a_1, \cdots, a_d \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^d a_iZ_{t_i} &= \sum_{i=1}^d a_iB_{t_i} - \sum_{i=1}^d a_i \int_0^{t_i} \frac{B_s}{s}\, ds \\ &= \sum_{i=1}^d a_iB_{t_i} - \sum_{i=1}^d a_i \lim_{j\to\infty} \sum_{k=0}^j \frac{t_i}{j}\frac{B_{\frac{kt_i}{j}}}{\frac{kt_i}{j}} \\ &= \lim_{j\to\infty}\left[\sum_{i=1}^d a_iB_{t_i} - \sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^j \frac{a_i}{k} B_{\frac{kt_i}{j}}\right]\end{aligned}$$

On sait que la limite ps (et en probabilité – en utilisant la fonction caractéristique) de v.a. gaussienne est gaussienne, donc $\sum_{i=1}^d a_iZ_{t_i}$ est gaussienne et donc $(Z_t)_t$ est un processus gaussien continue.

✓ Soit $s, t \geqslant 0$ tels que $s \leqslant t$, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(Z_tZ_s\right) &= \mathbb{E}\left(B_tB_s\right) - \mathbb{E}\left(B_t \int_0^s \frac{B_r}{r}\, dr\right) - \mathbb{E}\left(\int_0^t \frac{B_r}{r}\, drB_s\right) + \mathbb{E}\left(\int_0^s \frac{B_r}{r}\, dr \int_0^t \frac{B_r}{r}\, dr\right) \\ &= \mathbb{E}\left(B_tB_s\right) - \int_0^s \frac{\mathbb{E}\left(B_tB_r\right)}{r}\, dr - \int_0^t \frac{\mathbb{E}\left(B_rB_s\right)}{r}\, dr + \int_0^s\int_0^t \frac{\mathbb{E}\left(B_rB_{r'}\right)}{rr'}\, dr'dr \\ &= s - s - \int_0^t \frac{s \wedge r}{r}\, dr + \int_0^s\int_0^t \frac{r \wedge r'}{rr'}\, dr'dr = s\end{aligned}$$

en utilisant la relation de Chasles à plusieurs reprises.

On conclut que Z_t est un mouvement Brownien.

EXERCICE 37

Soit $(B_t)_{t \geqslant 0}$ un mouvement brownien et $\alpha > \frac{1}{2}$. Montrer que ps les trajectoires du mouvement brownien ne sont pas α-hölderienne.

Réponse :

Soit $\alpha > \frac{1}{2}$ et $T > 0$. Supposons qu'il existe $N \in \mathcal{F}$ tel que $P(N) = 0$ et

$$\forall \omega \in N^c, \ \ \exists C(\omega) > 0, \quad \forall t, s \in [0, T], \ \ |B_t(\omega) - B_s(\omega)| \leqslant C(\omega)\,|t-s|^{\alpha}.$$

Donc

$$0 \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} \left(B_{\frac{(i+1)T}{n}}(\omega) - B_{\frac{iT}{n}}(\omega)\right)^2 \leqslant C(\omega)^2 \sum_{i=0}^{n-1} \left|\frac{T}{n}\right|^{2\alpha}$$
$$\leqslant C(\omega)^2 \frac{T^{2\alpha}}{n^{2\alpha-1}} \longrightarrow_{n\to\infty} 0,$$

mais, on sait que

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left(B_{\frac{(i+1)T}{n}} - B_{\frac{iT}{n}}\right)^2 \longrightarrow_{n\to\infty} T \text{ dans } L^2.$$

Absurde, donc ps les trajectoires du mouvement brownien ne sont pas α-hölderienne.

EXERCICE 38

Soit $(B_t)_{t\geqslant 0}$ un mouvement brownien. Calculer, pour $s \geqslant 0$.

1. $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{B_{s+t}-B_s}{t}$.
2. $\limsup_{t\to\infty} \frac{B_{s+t}-B_s}{\sqrt{t}}$, $\quad \liminf_{t\to\infty} \frac{B_{s+t}-B_s}{\sqrt{t}}$.
3. $\limsup_{t\to 0} \frac{B_{s+t}-B_s}{\sqrt{t}}$ $\quad \liminf_{t\to 0} \frac{B_{s+t}-B_s}{\sqrt{t}}$.
4. Montrer que ps les trajectoires du mouvement brownien ne sont pas $\frac{1}{2}$-hölderiennes.

Réponse :

1. Posons $W_r = \begin{cases} r\left(B_{s+r^{-1}} - B_s\right) & \text{si } r > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. On a d'après le cours $(W_r)_{r\geqslant 0}$ est un mouvement brownien continu. Donc,
$$\boxed{\lim_{t\to\infty} \frac{B_{s+t}-B_s}{t} = \lim_{r\to 0} W_r = 0 \quad \text{ps.}}$$
2. Posons $W_t \stackrel{\text{def}}{=} B_{s+t} - B_s$. D'après le cours $(W_t)_{t\geqslant 0}$ est un mouvement brownien et $\limsup_{t\to\infty} \frac{W_t}{\sqrt{t}} = +\infty$ ps, $\quad \liminf_{t\to\infty} \frac{W_t}{\sqrt{t}} = -\infty$ ps. Donc
   - ✓ $\limsup_{t\to\infty} \frac{B_{s+t}-B_s}{\sqrt{t}} = \limsup_{t\to\infty} \frac{W_t}{\sqrt{t}} = +\infty$ ps.
   - ✓ $\liminf_{t\to\infty} \frac{B_{s+t}-B_s}{\sqrt{t}} = \liminf_{t\to\infty} \frac{W_t}{\sqrt{t}} = -\infty$ ps.
3. Posons $W_r = \begin{cases} r\left(B_{s+r^{-1}} - B_s\right) & \text{si } r > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. D'après le cours $(W_t)_{t\geqslant 0}$ est un mouvement brownien et $\limsup_{r\to\infty} \frac{W_r}{\sqrt{r}} = +\infty$ ps, $\quad \liminf_{r\to\infty} \frac{W_r}{\sqrt{r}} = -\infty$ ps. Donc,
   - ✓ $\limsup_{t\to 0} \frac{B_{s+t}-B_s}{\sqrt{t}} = \limsup_{r\to\infty} \frac{W_r}{\sqrt{r}} = +\infty$ ps.
   - ✓ $\liminf_{t\to 0} \frac{B_{s+t}-B_s}{\sqrt{t}} = \liminf_{r\to\infty} \frac{W_r}{\sqrt{r}} = -\infty$ ps.
4. Soit $N' \stackrel{\text{def}}{=} \left(\limsup_{t\to 0} \frac{B_t}{\sqrt{t}} < +\infty\right)$, on a $P(N') = 0$.
   Supposons qu'il existe un réel $T > 0$ et un négligeable N tel que $\forall \omega \notin N$, $\exists C(\omega) \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall s, t \in [0, T]$,
   $$|B_t(\omega) - B_s(\omega)| \leqslant C(\omega)\sqrt{|t-s|}.$$
   En particulier, $\forall \omega \notin N \cup N'$, $\forall t \in]0, T]$,
   $$\frac{B_t(\omega)}{\sqrt{t}} \leqslant C(\omega).$$
   Donc $\forall \omega \notin N \cup N'$, $C(\omega) = +\infty$. Absurde, d'où presque surement les trajectoires du mouvement brownien ne sont pas $\frac{1}{2}$-hölderiennes.

EXERCICE 39

Pour $t > 0$ et $y \in \mathbb{R}$, posons

$$G(t, y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{y^2}{2t}} \qquad \text{(dit noyau de la chaleur)}$$

On vérifie facilement que

1. $\forall (t, y) \in]0, +\infty[\times\mathbb{R}, \quad 0 < G(t, y) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}$,
2. $\forall (t, y) \in]0, +\infty[\times\mathbb{R} \longmapsto G(t, y)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$,
3. $\forall t > 0, \quad \int_{\mathbb{R}} G(t, y)\,\mathrm{d}y = 1$.
4. $\forall t > 0, \forall q > 0, \quad \int_{\mathbb{R}} G^q(t, y)\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\sqrt{q}} \times \left(\frac{1}{2\pi t}\right)^{\frac{q-1}{2}}$.

Pour $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ borélienne, $t \geqslant 0$ et $x \in \mathbb{R}$. On pose

$$P_t(f)(x) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}} f(r) G(t, x-r)\,\mathrm{d}r & \text{si } t > 0 \\ f(x) & \text{si } t = 0. \end{cases}$$

Pour $f:\mathbb{R}\to\overline{\mathbb{R}}$ borélienne, $t\geqslant 0$ et $x\in\mathbb{R}$. On pose

$$P_t(f)(x)=\begin{cases}P_t(f^+)(x)-P_t(f^-)(x) & \text{si } P_t(|f|)(x)<+\infty\\ +\infty & \text{sinon.}\end{cases}$$

Montrer que

1. $\forall (t,y)\in]0,+\infty[\times\mathbb{R},\qquad \frac{\partial}{\partial t}G(t,y)=\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}G(t,y).$
2. Pour toute fonction $f:\mathbb{R}\to\overline{\mathbb{R}}_+$ borélienne, $\forall t,s\geqslant 0$ et $\forall x\in\mathbb{R}$,
$$P_t\left(P_s(f)\right)(x)=P_{t+s}(f)(x).$$
3. Pour toute fonction $f:\mathbb{R}\to\overline{\mathbb{R}}$ borélienne, $\forall t\geqslant 0$, $\forall p\geqslant 1$ et $\forall x\in\mathbb{R}$,
$$|P_t(f)(x)|^p\leqslant P_t(|f|^p)(x).$$
4. Pour toute fonction $f:\mathbb{R}\to\overline{\mathbb{R}}$ borélienne, $\forall t>0$, $\forall p\in]1,\infty[$ et $\forall x\in\mathbb{R}$,
$$|P_t(f)(x)|\leqslant \frac{1}{\sqrt[2q]{q}}\,\frac{1}{\sqrt[2p]{2\pi t}}\,\left[\int_{\mathbb{R}}|f(r)|^p\,\mathrm{d}r\right]^{\frac{1}{p}}=\frac{1}{\sqrt[2q]{q}}\,\frac{1}{\sqrt[2p]{2\pi t}}\,||f||_p.$$
avec q le conjugué de p.
5. Pour toute fonction $f:\mathbb{R}\to\overline{\mathbb{R}}$ borélienne, $\forall t>0$ et $\forall x\in\mathbb{R}$,
$$|P_t(f)(x)|\leqslant ||f||_\infty.$$
6. Pour toute fonction $f:\mathbb{R}\to\overline{\mathbb{R}}$ borélienne, $\forall t>0$ et $\forall x\in\mathbb{R}$,
$$|P_t(f)(x)|\leqslant\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{\mathbb{R}}|f(r)|\,\mathrm{d}r=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\,||f||_1.$$
7. Pour toute fonction $f:\mathbb{R}\to\overline{\mathbb{R}}$ borélienne, $\forall t>0$, $\forall p\in[1,+\infty]$,
$$||P_t(f)||_p\leqslant ||f||_p\quad\text{et}\quad ||P_t(|f|)||_1=||f||_1.$$
8. Si $f\in L^p(\mathbb{R})$ alors pour $t>0$, $P_t(f)\in L^p(\mathbb{R})\cap L^\infty(\mathbb{R})$ et pour $p=1$,
$$\int_{\mathbb{R}}P_t(f)(x)dx=\int_{\mathbb{R}}f(x)dx.$$
9. Si f continue bornée alors $(t,x)\mapsto P_t(f)(x)$ est continue.
10. Si f est dans $\mathcal{C}_b^2$ alors
$$\lim_{t\to 0}\frac{P_t(f)(x)-f(x)}{t}=\frac{1}{2}f''(x).$$
11. Si f est bornée alors $\forall t>0$, $P_t(f)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et
$$\partial_t P_t(f)=\frac{1}{2}\partial_x^2P_t(f).$$
12. Pour toute fonction $f:\mathbb{R}\to\overline{\mathbb{R}}$ borélienne telle qu' il existe $p\in[1,+\infty]$, $f\in L^p$ et $\forall t>0$,
$$x\in\mathbb{R}\longmapsto P_t(f)(x)\quad\text{est de classe } \mathcal{C}^\infty.$$
13. Si $f\in\mathcal{C}_b^2$ alors
$$\partial_x^2P_t(f)=P_t(f'').$$

Réponse :

1. On a
$$\begin{aligned}
&*\frac{\partial}{\partial t}G(t,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{y^2}{2t}}\times\left[\frac{y^2}{2t^2}-\frac{1}{2t}\right]\\
&*\frac{\partial}{\partial y}G(t,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{y^2}{2t}}\times\frac{-y}{t}\\
&*\frac{\partial^2}{\partial y^2}G(t,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{y^2}{2t}}\times\left[\frac{y^2}{t^2}-\frac{1}{t}\right]
\end{aligned}$$
2. Le cas $st=0$ est triviale. Supposons que $st>0$, donc
$$\begin{aligned}
P_t\circ P_s(f)(x)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{\mathbb{R}}P_s(f)(r)\,e^{-\frac{(x-r)^2}{2t}}\,dr\\
&=\frac{1}{2\pi\sqrt{st}}\int_{\mathbb{R}}\left[\int_{\mathbb{R}}f(z)\,e^{-\frac{(r-z)^2}{2s}}\,dz\right]e^{-\frac{(x-r)^2}{2t}}\,dr\\
&=\frac{1}{\sqrt{2\pi(s+t)}}\int_{\mathbb{R}}f(z)\,e^{-\frac{(x-z)^2}{2(s+t)}}h(z,x)\,dz\qquad\qquad \mathit{Fubini-Tonelli}\\
&=\frac{1}{\sqrt{2\pi(s+t)}}\int_{\mathbb{R}}f(z)\,e^{-\frac{(x-z)^2}{2(s+t)}}\,dz=P_{t+s}(f)(x)
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
h(z,x) &\overset{\text{def}}{=} \frac{\sqrt{2\pi(s+t)}}{\sqrt{2\pi t}\sqrt{2\pi s}} e^{\frac{(x-z)^2}{2(s+t)}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(r-z)^2}{2s}} e^{-\frac{(x-r)^2}{2t}}\, dr \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{ts}{t+s}}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2\frac{st}{t+s}}\left[\frac{(x-r)^2}{t} + \frac{(r-z)^2}{s} - \frac{(x-z)^2}{s+t}\right]} dr \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{ts}{t+s}}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2\frac{st}{t+s}}\left[r - \frac{rt+xs}{t+s}\right]^2} dr = 1.
\end{aligned}$$

3. L'inégalité est triviale pour $p=1$. Pour $p>1$, on a

$$\begin{aligned}
|P_t(f)(x)|^p &\leqslant (P_t(|f|)(x))^p \\
&\leqslant \left(\int_{\mathbb{R}} |f(r)| G(t,x-r)\,\mathrm{d}r\right)^p \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}} |f(r)|^p G(t,x-r)\,\mathrm{d}r \qquad \text{d'après Hölder} \\
&\leqslant P_t(|f|^p)(x).
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
|P_t(f)(x)| &= \int_{\mathbb{R}} |f(r)| G(t,x-r)\,\mathrm{d}r \\
&\leqslant \left(\int_{\mathbb{R}} G^q(t,x-r)\,\mathrm{d}r\right)^{\frac{1}{q}} ||f||_p \qquad \text{d'après Hölder} \\
&\leqslant \frac{1}{\sqrt[2q]{q}} \; \frac{1}{\sqrt[2p]{2\pi t}} ||f||_p.
\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
|P_t(f)(x)| &= \int_{\mathbb{R}} |f(r)| G(t,x-r)\,\mathrm{d}r \\
&\leqslant ||f||_\infty \int_{\mathbb{R}} G(t,x-r)\,\mathrm{d}r = ||f||_\infty.
\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}
|P_t(f)(x)| &= \int_{\mathbb{R}} |f(r)| G(t,x-r)\,\mathrm{d}r \\
&\leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} |f(r)|\,\mathrm{d}r = ||f||_1.
\end{aligned}$$

7. Pour $p=+\infty$ est triviale. Supposons que $p<+\infty$, on a donc

$$\begin{aligned}
||P_t(f)||_p &= \left(\int_{\mathbb{R}} |P_t(f)(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leqslant \left(\int_{\mathbb{R}} (P_t(|f|)(x))^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leqslant \left(\int_{\mathbb{R}} P_t(|f|^p)(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \qquad \text{égalité si } p=1 \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} |f(r)|^p G(t,x-r)\,\mathrm{d}r\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \\
&= ||f||_p. \qquad \text{Fubini-Tonelli et chgt variable}
\end{aligned}$$

8. On a si $f \in L^p(\mathbb{R})$ alors $|f| \in L^p(\mathbb{R})$, $f^+ \in L^p(\mathbb{R})$ et $f^- \in L^p(\mathbb{R})$ et d'après les questions précédentes et pour $t>0$, $P_t(f) \in L^p(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ et pour le cas $p=1$,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} P_t(f)(x)dx &= \int_{\mathbb{R}} P_t(f^+)(x)dx - \int_{\mathbb{R}} P_t(f^-)(x)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} f^+(r)\,dr - \int_{\mathbb{R}} f^-(r)\,dr \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(r)\,dr
\end{aligned}$$

9. Soit $(t_n, x_n)_n$ une suite qui converge vers (t,x).

   $\star$ **Cas $t>0$:** On a, d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue

$$\begin{aligned}
P_{t_n}(f)(x_n) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x_n + \sqrt{t_n}s)\, e^{-\frac{s^2}{2}}\, ds \qquad \text{(changement de variable)} \\
&\to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x+\sqrt{t}s)\, e^{-\frac{s^2}{2}}\, ds = P_t(f)(x).
\end{aligned}$$

⋆ **Cas $t=0$:**

$$\begin{aligned}
|P_{t_n}(f)(x_n)-f(x)| &\leqslant |P_{t_n}(f)(x_n)-f(x_n)|+|f(x_n)-f(x)| \\
&\leqslant \left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} f(x_n+\sqrt{t_n}s)\,e^{-\frac{s^2}{2}}\,ds-f(x_n)\right|+|f(x_n)-f(x)| \\
&\leqslant \left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} \left[f(x_n+\sqrt{t_n}s)-f(x_n)\right]\,e^{-\frac{s^2}{2}}\,ds\right|+|f(x_n)-f(x)| \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}} \frac{\left|f(x_n+\sqrt{t_n}s)-f(x_n)\right|\,e^{-\frac{s^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,ds+|f(x_n)-f(x)| \\
&\to_n 0,
\end{aligned}$$

car

- $\dfrac{\left|f(x_n+\sqrt{t_n}s)-f(x_n)\right|\,e^{-\frac{s^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \to 0 \qquad \text{quand} \quad n\to\infty$
- $\dfrac{\left|f(x_n+\sqrt{t_n}s)-f(x_n)\right|\,e^{-\frac{s^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \leqslant \dfrac{2||f||_\infty\,e^{-\frac{s^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \in L^1(\mathbb{R},\lambda).$

puis on applique le théorème de convergence dominée de Lebesgue.

10. Posons
$$\varepsilon(h)=\frac{f(x+h)-f(x)-f'(x)h-\frac{1}{2}f''(x)h^2}{h^2}.$$
D'après la formule de Taylor-Lagrange : $\varepsilon(h)_{h\to 0}\to 0$ et donc $\sup_h\,|\varepsilon(h)|<\infty$.
Or
$$\int_{\mathbb{R}} s\,e^{-\frac{s^2}{2}}\,ds=0 \quad \text{et} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{s^2}{2}}\,ds=\int_{\mathbb{R}} s^2\,e^{-\frac{s^2}{2}}\,ds=1.$$
Donc, pour toute suite $(t_n)_n$ de suite de réels strictement positifs qui converge vers 0.
$$\begin{aligned}
&\frac{P_{t_n}(f)(x)-f(x)}{t_n}-\frac{1}{2}f''(x) \\
&\qquad=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\frac{f(x+\sqrt{t_n}s)-f(x)-f'(x)\sqrt{t_n}s-\frac{1}{2}f''(x)\,s^2t_n}{t_n}e^{-\frac{s^2}{2}}ds \\
&\qquad=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} s^2\varepsilon(s\sqrt{t_n})\,e^{-\frac{s^2}{2}}\,ds \to_{n\to\infty} 0
\end{aligned}$$
où on a utilisé le théorème de Lebesgue, pour la convergence.

11. Par récurrence et en utilisant le théorème de Lebesgue concernant la dérivée (c'est ici qu'on utilise f bornée), on a pour tout $n\in\mathbb{N}$ et $t>0$ il existe un polynôme $Q_n\in\mathbb{R}[X_1,X_2]$ tel que
$$\partial_x^n P_t(f)(x)=\frac{1}{t^n\sqrt{2\pi t}}\int_{\mathbb{R}} f(r)Q_n(x-r,t)\;e^{-\frac{(x-r)^2}{2t}}\,dr.$$
Ceci montre que $\forall t>0,\quad P_t(f)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
$$\begin{aligned}
\partial_t P_t(f)(x) &= \lim_{s\to 0}\frac{P_{t+s}(f)(x)-P_tf(x)}{s} \\
&= \lim_{s\to 0}\frac{P_s(P_t(f))(x)-P_tf(x)}{s} && \text{d'après la question 2.} \\
&= \frac{1}{2}\partial_x^2 P_t(f)(x) && \text{d'après la question 10.}
\end{aligned}$$

12. Posons $s=\frac{t}{2}$ et $g(x)=P_s(f)(x)$, d'après les questions 4., 5. et 6., on a g est bornée et la question précédente et la question 2. nous donnent que $x\longmapsto P_s(g)(x)=P_t(f)(x)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

13.
$$\begin{aligned}
P_t(f'')(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{\mathbb{R}} f''(r)\,e^{-\frac{(x-r)^2}{2t}}\,dr \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{\mathbb{R}} f(r)\,\partial_r^2\,e^{-\frac{(x-r)^2}{2t}}\,dr && \text{intégration par parties deux fois} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{\mathbb{R}} f(r)\,\partial_x^2\,e^{-\frac{(x-r)^2}{2t}}\,dr \\
&= \partial_x^2\,P_t(f)(x) && \text{théorème de Lebesgue.}
\end{aligned}$$

EXERCICE 40

Soit $(B_t)_{t\geqslant 0}$ un mouvement brownien, soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ borélienne bornée et soit $t,s\geqslant 0$. Montrer que
$$\mathbb{E}\Big[f(B_t)/\mathcal{F}_s^B\Big]=P_{(t-s)^+}(f)\,(B_s)$$

Réponse :

✓ Si $t\leqslant s$, alors $f(B_t)$ est $\mathcal{F}_s^B$-mesurable donc
$$\mathbb{E}\Big[f(B_t)/\mathcal{F}_s^B\Big]=f(B_t)=P_0(f)\,(B_s)=P_{(t-s)^+}(f)\,(B_s).$$

✓ Supposons que $t>s$. On a $x\mapsto P_{(t-s)^+}(f)\,(x)$ est borélienne, d'où $P_{(t-s)^+}(f)\,(B_s)$ est $\sigma(B_s)$-mesurable donc $\mathcal{F}_t^B$-mesurable.

D'après l'exercice 16,

$$\mathbb{E}\Big[f(B_t)/\mathcal{F}_s^B\Big] = \mathbb{E}\Big[f(B_t - B_s + B_s)/\mathcal{F}_s^B\Big] = \phi(B_s)$$

avec $\phi(x) = \mathbb{E}f(B_t - B_s + x) = \int_{\mathbb{R}} f(z)P^{B_t - B_s + x}(\mathrm{d}z) = P_{(t-s)^+}(f)(x)$. □

EXERCICE 41

Soit X une v.a. gaussienne centrée réduite. Notons $X_t = tX$ (X_t est un processus gaussien centré continu).

Donner $\mathcal{F}_0^X$ et $\mathcal{F}_{0+}^X$.

Réponse :

$$\checkmark\ \mathcal{F}_0^X = \{\emptyset, \Omega\}.$$
$$\checkmark\ \mathcal{F}_{0+}^X = \sigma(X).$$

Remarque : $\{\emptyset, \Omega\} \neq \sigma(X)$.

EXERCICE 42

Soit $(B_t)_{t\geqslant 0}$ un mouvement brownien défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et $T > 0$. Soit ξ une v.a. $\mathcal{F}_T^B$-mesurable et intégrable. —Rappel : $\mathcal{F}_t^B = \sigma_\Omega\Big(B_r,\ r \in [0,t]\Big)$ —

Posons

$$\mathcal{C} = \Big\{ f_1(B_{t_1})f_2(B_{t_2} - B_{t_1}) \ldots f_d(B_{t_d} - B_{t_{d-1}}),\ \ f_i \in \mathcal{C}_b^0,\ \ 0 < t_1 < \cdots < t_d \leqslant T,\ \ d \in \mathbb{N}^* \Big\}.$$

Remarque : Dans la définition de $\mathcal{C}$, on peut prendre $t_d = T$ et/ou $0 < t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_d \leqslant T$ sans perte de généralité..

Dans cet exercice, on peut utiliser le lemme suivant sans démonstration

Lemme 2
Pour toute variable aléatoire X intégrable et $\mathcal{F}_T^B$−mesurable et pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $g \in vect\,\mathcal{C}$ tel que $\mathbb{E}|X - g| < \varepsilon$.

1. Supposons que $(\xi_n)_n \to \xi$ dans L^1 et que $\forall n$ il existe une $(\mathcal{F}_t^B)_t$−martingale continue $(M_t^{\xi_n})_n$ telle que $\forall t \geqslant 0$, $\Big(M_t^{\xi_n} = \mathbb{E}\Big(\xi_n/\mathcal{F}_t^B\Big)$ ps.$\Big)$ Démontrer qu'il existe une $(\mathcal{F}_t^B)_t$−martingale continue $(M_t^{\xi})_{t\geqslant 0}$ telle que $\forall t \geqslant 0$, $\Big(M_t^{\xi} = \mathbb{E}\Big(\xi/\mathcal{F}_t^B\Big)$ ps.$\Big)$
2. En utilisant le lemme, montrer qu'il existe une $(\mathcal{F}_t^B)_t$−martingale continue $(M_t^{\xi})_{t\geqslant 0}$ telle que $\forall t \geqslant 0$,
$$M_t^{\xi} = \mathbb{E}\Big(\xi/\mathcal{F}_t^B\Big) \text{ ps.}$$
3. Montrer que $\forall A \in \mathcal{F}_{t+}^B$, $\exists C \in \mathcal{F}_t^B$ tel que $P(A\Delta C) = 0$.
4. En déduire que $\mathbb{E}\Big(\xi/\mathcal{F}_{0+}^B\Big) = \mathbb{E}\xi$ ps. et que $\forall A \in \mathcal{F}_{0+}^B$, $P(A) \in \{0,1\}$.

Réponse :

1. Supposons que $(\xi_n)_n \to \xi$ dans L^1 et que $\forall n$ il existe une $(\mathcal{F}_t^B)_t$−martingale <u>continue</u> $(M_t^{\xi_n})_n$ telle que $\forall t$, $M_t^{\xi_n} = \mathbb{E}\Big(\xi_n/\mathcal{F}_t^B\Big)$ ps. Démontrer qu'il existe une $(\mathcal{F}_t^B)_t$−martingale <u>continue</u> $(M_t^{\xi})_{t\geqslant 0}$ telle que $\forall t \geqslant 0$, $M_t^{\xi} = \mathbb{E}\Big(\xi/\mathcal{F}_t^B\Big)$ ps. :
Pour simplifier, on prendra M^n à la place de M^{ξ_n}.
$(\xi_n)_n$ est une suite de Cauchy dans L^1, donc $\forall k$, $\exists N_k \in \mathbb{N}^*$ tel que
$$\forall n, m \geqslant N_k, \quad \mathbb{E}\,|\xi_n - \xi_m| \leqslant \frac{1}{4^k}.$$
Posons $\phi(k) = N_k + N_{k-1} + \cdots + N_0$, on a ϕ est strictement croissante et
$$\forall k, \quad \mathbb{E}\left|\xi_{\phi(k+1)} - \xi_{\phi(k)}\right| \leqslant \frac{1}{4^k}$$
Soit $(t_n)_n$ une suite de réels injective dense dans $[0,T]$ telle que $t_0 = T$. Posons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $D_n = \{t_0, \cdots, t_n\}$. Soit $s_0 < \cdots < s_n = T$ tel que $D_n = \{s_0, \cdots, s_n\}$. D'après le théorème de l'inégalité maximale de Doob appliqué à la martingale $(M_{s_i}^{\phi(k+1)} - M_{s_i}^{\phi(k)})_{i\in\{0,\cdot\cdot,n\}}$, on a
$$P\left(\sup_i \left|M_{s_i}^{\phi(k+1)} - M_{s_i}^{\phi(k)}\right| \geqslant \frac{1}{2^k}\right) \leqslant 2^k\mathbb{E}\left|M_{s_n}^{\phi(k+1)} - M_{s_n}^{\phi(k)}\right|$$
$$\leqslant 2^k\mathbb{E}\left|\xi_{\phi(k+1)} - \xi_{\phi(k)}\right| \leqslant \frac{1}{2^k}$$
Donc
$$P\left(\sup_{t\in D_n} \left|M_t^{\phi(k+1)} - M_t^{\phi(k)}\right| \geqslant \frac{1}{2^k}\right) \leqslant \frac{1}{2^k}$$
En tendant $n \to \infty$, on obtient
$$P\left(\sup_{t\in D} \left|M_t^{\phi(k+1)} - M_t^{\phi(k)}\right| \geqslant \frac{1}{2^k}\right) \leqslant \frac{1}{2^k}$$
avec $D = \cup_n D_n$.
Or $t \mapsto \left|M_t^{\phi(k+1)} - M_t^{\phi(k)}\right|$ est continue et D est dense dans $[0,T]$, donc
$$\sup_{t\in[0,T]} \left|M_t^{\phi(k+1)} - M_t^{\phi(k)}\right| = \sup_{t\in D} \left|M_t^{\phi(k+1)} - M_t^{\phi(k)}\right|$$

Par conséquent,

$$\sum_{k=0}^{\infty} P\left(\sup_{t\in[0,T]}\left|M_t^{\phi(k+1)}-M_t^{\phi(k)}\right|\geqslant \frac{1}{2^k}\right)<\infty.$$

D'après le lemme de Borel-Cantelli

$$P\left(\limsup_k\left(\sup_{t\in[0,T]}\left|M_t^{\phi(k+1)}-M_t^{\phi(k)}\right|\geqslant \frac{1}{2^k}\right)\right)=0.$$

Posons

$$M_t^{\xi}(\omega)\overset{\text{def}}{=}\begin{cases}\liminf_k\ M_t^{\phi(k)}(\omega) & \text{si } \liminf_k\ M_t^{\phi(k)}(\omega)\in\mathbb{R}\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

$\boxed{\text{Il est clair que } \forall t\geqslant 0,\ M_t^{\xi} \text{ est } \mathcal{F}_t^B\text{-mesurable.}}$

Soit $\omega\notin N\overset{\text{def}}{=}\limsup_k\left(\sup_{t\in[0,T]}\left|M_t^{\phi(k+1)}-M_t^{\phi(k)}\right|\geqslant\frac{1}{2^k}\right)$, donc il existe $k_0(\omega)\in\mathbb{N}^*$ tel que $\forall k\geqslant k_0(\omega)$

$$\sup_{t\in[0,T]}\left|M_t^{\phi(k+1)}(\omega)-M_t^{\phi(k)}(\omega)\right|<\frac{1}{2^k}$$

Ainsi

$$\sum_k\sup_{t\in[0,T]}\left|M_t^{\phi(k+1)}(\omega)-M_t^{\phi(k)}(\omega)\right|<\infty.$$

Ce qui donne que $(t\mapsto M_t^{\phi(k)}(\omega))_k$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{C}^0([0,T];\mathbb{R})$ muni de sa norme sup (donc un Banach). Ainsi, la fonction $t\mapsto M_t^{\xi}(\omega)$ est dans $\mathcal{C}^0([0,T];\mathbb{R})$ et

$$\sup_{t\in[0,T]}\left|M_t^{\phi(k)}(\omega)-M_t^{\xi}(\omega)\right|\to_{k\to\infty}0.$$

D'autre part $\forall t\in[0,T]$, $M_t^{\phi(k)}$ converge vers $\mathbb{E}\left(\xi/\mathcal{F}_t^B\right)$ dans L^1, donc il existe une sous suite de $(M_t^{\phi(k)})_k$ qui converge ps vers $\mathbb{E}\left(\xi/\mathcal{F}_t^B\right)$ (le presque sure et la sous suite dépendent de t !). Ainsi presque surement $\mathbb{E}\left(\xi/\mathcal{F}_t^B\right)=M_t^{\xi}$.

2. En utilisant le lemme, montrer qu'il existe une $(\mathcal{F}_t^B)_t$−martingale continue $(M_t^{\xi})_{t\geqslant 0}$ telle que $\forall t\geqslant 0,\quad M_t^{\xi}=\mathbb{E}\Big(\xi/\mathcal{F}_t^B\Big)$ ps. :

   D'après la question 4., le lemme et la linéarité, il suffit de considérer le cas $\xi\in\mathcal{C}$. Soit donc $d\in\mathbb{N}^*$, $0=t_0<t_1<\cdots<t_d=T$ et $f_1,\cdots,f_d\in\mathcal{C}_b^0(\mathbb{R};\mathbb{R})$ tels que

$$\xi=\prod_{i=1}^d f_i\left(B_{t_i}-B_{t_{i-1}}\right)$$

Posons, pour $(s,x)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}$ et $i\in\{1,\cdot\cdot,d\}$,

$$g_i(s,x)=\mathbb{E}\,f_i\left(B_{t_i}-B_s+x\right)$$

On a f_i est continue bornée et B_s est continue donc d'après le théorème de Lebesgue g_i est continue. De plus $\boxed{g_i(s,B_s-B_{t_{i-1}})=\mathbb{E}\,f_i\left(B_{t_i}-B_{t_{i-1}}/\mathcal{F}_s^B\right)}$, d'après un exo.

Posons aussi

$$M_s^{\xi,i}\overset{\text{def}}{=}g_i(s,B_s-B_{t_{i-1}})\prod_{j=1}^{i-1}f_j\left(B_{t_j}-B_{t_{j-1}}\right)\prod_{j=i+1}^{d}\mathbb{E}\left[f_j\left(B_{t_j}-B_{t_{j-1}}\right)\right]$$

et

$$\begin{aligned}M_s^{\xi}&\overset{\text{def}}{=}\sum_{i=1}^d M_s^{\xi,i}\,1_{[t_{i-1},t_i[}(s)\ +\ \xi\,1_{\{T\}}(s)\\&=\begin{cases}M_s^{\xi,i} & \text{si } s\in[t_{i-1},t_i[\\ \xi & \text{si } s=T.\end{cases}\end{aligned}$$

✓ $\boxed{\text{Mesurabilité :}}$

$\forall s\in[0,T],\quad M_s^{\xi}$ est $\mathcal{F}_s^B-$mesurable.

✓ $\boxed{\text{Continuité :}}$

On a, pour tout $i=1,\cdot\cdot,d$, $s\mapsto M_s^{\xi,i}$ est continue sur $[0,T]$. Donc il suffit de montrer que $M_{t_i}^{\xi,i}=M_{t_i}^{\xi,i+1}$ pour $i=1,\cdot\cdot,d-1$ et $M_T^{\xi,d}=\xi$ (pour $i=d$), pour établir la continuité de $s\mapsto M_s^{\xi}$.

Or, pour $i\neq d$

$$\begin{aligned}M_{t_i}^{\xi,i}&=g_i(t_i,B_{t_i}-B_{t_{i-1}})\prod_{j=1}^{i-1}f_j\left(B_{t_j}-B_{t_{j-1}}\right)\prod_{j=i+1}^{d}\mathbb{E}\left[f_j\left(B_{t_j}-B_{t_{j-1}}\right)\right]\\&=f_i(B_{t_i}-B_{t_{i-1}})\prod_{j=1}^{i-1}f_j\left(B_{t_j}-B_{t_{j-1}}\right)\prod_{j=i+1}^{d}\mathbb{E}\left[f_j\left(B_{t_j}-B_{t_{j-1}}\right)\right]\\&=\prod_{j=1}^{i}f_j\left(B_{t_j}-B_{t_{j-1}}\right)\prod_{j=i+1}^{d}\mathbb{E}\left[f_j\left(B_{t_j}-B_{t_{j-1}}\right)\right]\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} M_{t_i}^{\xi,i+1} &= g_{i+1}(t_i, \overbrace{B_{t_i} - B_{t_i}}^{=0}) \prod_{j=1}^{i} f_j\left(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}\right) \prod_{j=i+2}^{d} \mathbb{E}\left[f_j\left(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}\right)\right] \\ &= \mathbb{E}\, f_{i+1}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \prod_{j=1}^{i} f_j\left(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}\right) \prod_{j=i+2}^{d} \mathbb{E}\left[f_j\left(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}\right)\right] \\ &= \prod_{j=1}^{i} f_j\left(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}\right) \prod_{j=i+1}^{d} \mathbb{E}\left[f_j\left(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}\right)\right]. \end{aligned}$$

et pour $i = d$,

$$\begin{aligned} M_T^{\xi,d} &= g_d(T, B_T - B_{t_{d-1}}) \prod_{j=1}^{d-1} f_j\left(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}\right) \\ &= f_d(B_T - B_{t_{d-1}}) \prod_{j=1}^{d-1} f_j\left(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}\right) \\ &= \prod_{j=1}^{d} f_j\left(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}\right) = \xi. \end{aligned}$$

Ce qui montre que $\boxed{s \mapsto M_s^\xi \text{ est continue.}}$

✓ $\boxed{\text{Version continue de } \mathbb{E}\left(\xi/\mathcal{F}_t^B\right) :}$

Soit $t \in [0, T[$ et $A \in \mathcal{F}_t^B$, soit $i \in \{1, \cdot\cdot, d\}$ tel que $t_{i-1} \leqslant t < t_i$. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[1_A \xi\right] &= \mathbb{E}\left[1_A \prod_{j=1}^{d} f_j\left(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}\right)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[1_A \prod_{j=1}^{i-1} f_j\left(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}\right) \times f_i\left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right)\right] \\ &\times \left[\prod_{j=i+1}^{d} \mathbb{E} f_j\left(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}\right)\right] \quad (indpendance!) \\ &= \mathbb{E}\left[1_A \prod_{j=1}^{i-1} f_j\left(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}\right) \times \mathbb{E}\left(f_i\left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right)/\mathcal{F}_t^B\right)\right] \\ &\times \left[\prod_{j=i+1}^{d} \mathbb{E} f_j\left(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}\right)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[1_A \prod_{j=1}^{i-1} f_j\left(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}\right) \times g_i\left(t, B_t - B_{t_{i-1}}\right)\right] \\ &\times \left[\prod_{j=i+1}^{d} \mathbb{E} f_j\left(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}\right)\right] = \mathbb{E}\left[1_A M_t^{\xi,i}\right] = \mathbb{E}\left[1_A M_t^\xi\right]. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\forall t \in [0, T], \left(M_t^\xi = \mathbb{E}\left(\xi/\mathcal{F}_t^B\right) \quad \text{presque sure}\right).}$$

3. Montrer que $\forall A \in \mathcal{F}_{t+}^B,\ \exists C \in \mathcal{F}_t^B$ tel que $P(A \Delta C) = 0$:
Soit $A \in \mathcal{F}_{t+}^B$, posons $\xi = 1_A$. On a

$$\forall s > t, \quad 1_A = \xi = M_s^\xi \ \ ps.$$

donc

$$1_A = M_{t+}^\xi = M_t^\xi \ \ ps$$

On a $C \stackrel{\text{def}}{=} \left(M_t^\xi = 1\right) \in \mathcal{F}_t^B$. Notons aussi $N' = \left(1_A \neq M_t^\xi\right)$, on a $P(N') = 0$ et $C \Delta A \subset N'$. CQFD

4. En déduire que $\forall A \in \mathcal{F}^B_{0+}$, $P(A) \in \{0,1\}$ et que $\mathbb{E}\Big(\xi/\mathcal{F}^B_{0+}\Big) = \mathbb{E}\xi$ ps. :
   Soit $A \in \mathcal{F}^B_{0+}$. D'après la question précédente il existe $C \in \mathcal{F}^B_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ tel que $P(A\Delta C) = 0$ donc $P(A) = 0$ ou $P(A^c) = 0$ (selon que $C = \emptyset$ ou $C = \Omega$) ainsi $P(A) \in \{0,1\}$.
   D'autre part, soit $A \in \mathcal{F}^B_{0+}$. On a

$$\mathbb{E}\left[\xi 1_A\right] = \begin{cases} 0 & \text{si } P(A)=0 \\ \mathbb{E}\xi(1-1_{A^c}) = \mathbb{E}\xi & \text{si } P(A)=1 \end{cases} = \mathbb{E}\left[(\mathbb{E}\xi)\ 1_A\right] \qquad cqdf.$$

EXERCICE 43

Montrer le lemme de l'exercice 42.

Réponse :

Par la méthode standard, il suffit de montrer le lemme avec $\xi = 1_A$. Pour cela, posons

$$\mathcal{M} \overset{\text{def}}{=} \left\{A \in \mathcal{F}^B_T \quad : \ \forall \varepsilon > 0,\ \exists g \in vect\,\mathcal{C}\ \ tq\ \ \mathbb{E}\left|1_A - g\right| < \varepsilon \quad \text{et} \quad 0 \leqslant g \leqslant 1\right\}$$

✓ On a $\emptyset, \Omega \in \mathcal{M}$ et $(A \in \mathcal{M} \implies A^c \in \mathcal{M})$ car $(g \in vect\,\mathcal{C} \implies 1-g \in vect\,\mathcal{C})$ et si $(A_n)_n \in \mathcal{M}^{\mathbb{N}}$ telle que $A_n \subset A_{n+1}$ alors en posant $A = \cup_n A_n$ et pour $\varepsilon > 0$, on a d'après le théorème de Lebesgue, l'existence d'un entier N tel que $\mathbb{E}\left|1_A - 1_{A_N}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Or $A_N \in \mathcal{M}$ donc il existe $g^N \in vect\,\mathcal{C}$ tel que $\mathbb{E}\left|1_{A_N} - g^N\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ d'où $\mathbb{E}\left|1_A - g^N\right| < \varepsilon$. Ainsi, $A \in \mathcal{M}$ et par suite $\boxed{\mathcal{M} \text{ est une classe monotone sur } \Omega.}$

✓ Notons $\mathcal{P}^T$ l'ensemble des parties finies de $]0,T]$ et, pour $J \in \mathcal{P}^T$,

$$\mathcal{F}^B_J = \sigma_\Omega\Big(B_r,\ r \in J\Big) \quad \text{et} \quad \mathcal{A}^T = \bigcup_{J \in \mathcal{P}^T} \mathcal{F}^B_J.$$

On a $\mathcal{A}^T$ est une algèbre sur Ω et que $\mathcal{F}^B_T = \sigma_\Omega(\mathcal{A}^T)$:
On a

i. $\emptyset \in \mathcal{A}^T$,

ii.

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{A}^T &\implies \exists J \in \mathcal{P}^T,\ A \in \mathcal{F}^B_J \\ &\implies \exists J \in \mathcal{P}^T,\ A^c \in \mathcal{F}^B_J \implies A^c \in \mathcal{A}^T, \end{aligned}$$

iii.

$$\begin{aligned} A, B \in \mathcal{A}^T &\implies \exists J \in \mathcal{P}^T,\ A \in \mathcal{F}^B_J \text{ et } \exists K \in \mathcal{P}^T,\ B \in \mathcal{F}^B_K \\ &\implies \exists J, K \in \mathcal{P}^T,\ A, B \in \mathcal{F}^B_{J\cup K} \\ &\implies \exists J, K \in \mathcal{P}^T,\ A \cup B \in \mathcal{F}^B_{J\cup K} \qquad \text{car } \mathcal{F}^B_{J\cup K} \text{ est une tribu} \\ &\implies A \cup B \in \mathcal{A}^T, \qquad \text{car } \mathcal{F}^B_{J\cup K} \subset \mathcal{A}^T \end{aligned}$$

donc $\mathcal{A}^T$ est une algèbre sur Ω.
D'autre part, $\forall t \in [0,T]$, B_t est $\mathcal{F}^B_{\{t\}}$-mesurable, or $\mathcal{F}^B_{\{t\}} \subset \mathcal{A}^T \subset \sigma(\mathcal{A}^T)$ donc B_t est $\sigma(\mathcal{A}^T)$-mesurable, d'où $\mathcal{F}^B_T \subset \sigma(\mathcal{A}^T)$ donc $\boxed{\mathcal{F}^B_T = \sigma(\mathcal{A}^T).}$

✓ D'autre part, soit $A \in \mathcal{A}^T$ donc il existe $d \in \mathbb{N}^*$, $t_1, \cdots, t_d \in [0,T]$ tels que $0 < t_1 < \cdots < t_d = T$ et

$$A \in \sigma\left(B_{t_1}, B_{t_2}, \cdots, B_{t_d}\right) = \sigma\left(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \cdots, B_{t_d} - B_{t_{d-1}}\right)$$

Soit $C \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ tel que

$$1_A = 1_C\left(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \cdots, B_{t_d} - B_{t_{d-1}}\right)$$

Soit $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}^*$ tel que si $C_N \overset{\text{def}}{=} C \cap B_{\mathbb{R}^d}(0,N)$ (la distance qu'on considère sur $\mathbb{R}^d$ est celle associée à la norme $||(x_1, \cdots, x_d)|| = \max_i |x_i|$) alors

$$\mathbb{E}\left|1_A - 1_{C_N}\left(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \cdots, B_{t_d} - B_{t_{d-1}}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Considérons sur $\left(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}\right)$ la probabilité ν définie par

$$\nu(D) \overset{\text{def}}{=} \mathbb{E}\left[1_D\left(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \cdots, B_{t_d} - B_{t_{d-1}}\right)\right]$$

On a le lemme suivant

Lemme 3
ν est régulière c-à-d pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$, il existe un ensemble compact (fermé) F et un ouvert U de $\mathbb{R}^d$ tels que

$$F \subset D \subset U \qquad \text{et} \qquad \nu\left(U \setminus F\right) < \varepsilon.$$

Soit, donc, un ensemble compact (fermé) F et un ouvert U de $\mathbb{R}^d$ tels que

$$F \subset C_N \subset U \qquad \text{et} \qquad \nu\left(U \setminus F\right) < \frac{\varepsilon}{8}.$$

Posons

$$\begin{aligned} h :\ \ \mathbb{R}^d &\longrightarrow [0,1] \\ x &\longmapsto \tfrac{d(F,x)}{d(U_N^c,x) + d(F,x)} \end{aligned} \qquad \text{où } U_N \overset{\text{def}}{=} U \cap B_{\mathbb{R}^d}(0,N)$$

On a

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left|1_{C_N}\left(B_{t_1},B_{t_2}-B_{t_1},\cdots,B_{t_d}-B_{t_{d-1}}\right)-h\left(B_{t_1},B_{t_2}-B_{t_1},\cdots,B_{t_d}-B_{t_{d-1}}\right)\right|\\&\quad\leqslant 2\mathbb{E}1_{U\setminus F}\left(B_{t_1},B_{t_2}-B_{t_1},\cdots,B_{t_d}-B_{t_{d-1}}\right)=2\nu\left(U\setminus F\right)<\frac{\varepsilon}{4}.\end{aligned}$$

Mais d'après le théorème de Stone-Weierstrass, il existe $Q\in\mathbb{R}[X_1\cdots X_d]$ tel que

$$\sup_{x\in\overline{B}_{\mathbb{R}^d}(0,N)}|h(x)-Q(x)|<\frac{\varepsilon}{4}.$$

Soit, de plus $\psi:\mathbb{R}\to[0,1]$ continue à support compact ($\mathcal{C}^\infty$ même) telle que $\psi(t)=1$ si $|t|\leqslant N$. Notons

$$g=Q\left(B_{t_1},B_{t_2}-B_{t_1},\cdots,B_{t_d}-B_{t_{d-1}}\right)\times\psi\left(B_{t_1}\right)\psi\left(B_{t_2}-B_{t_1}\right)\cdot\cdot\psi\left(B_{t_d}-B_{t_{d-1}}\right)$$

On a $g\in vect\,\mathcal{C}$, $h(x_1,\cdots,x_d)=h(x_1,\cdots,x_d)\times\psi(x_1)\cdot\cdot\psi(x_d)$ et

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left|1_A-g\right|&\leqslant\mathbb{E}\left|1_A-1_{C_N}\left(B_{t_1},B_{t_2}-B_{t_1},\cdots,B_{t_d}-B_{t_{d-1}}\right)\right|\\&\quad+\mathbb{E}\left|1_{C_N}\left(B_{t_1},B_{t_2}-B_{t_1},\cdots,B_{t_d}-B_{t_{d-1}}\right)-h\left(B_{t_1},B_{t_2}-B_{t_1},\cdots,B_{t_d}-B_{t_{d-1}}\right)\right|\\&\quad+\mathbb{E}\left[\left|h\left(B_{t_1},B_{t_2}-B_{t_1},\cdots,B_{t_d}-B_{t_{d-1}}\right)-Q\left(B_{t_1},B_{t_2}-B_{t_1},\cdots,B_{t_d}-B_{t_{d-1}}\right)\right|\times\right.\\&\qquad\left.\psi\left(B_{t_1}\right)\psi\left(B_{t_2}-B_{t_1}\right)\cdot\cdot\psi\left(B_{t_d}-B_{t_{d-1}}\right)\right]\\&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}\leqslant\varepsilon.\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\mathcal{A}^T\subset\mathcal{M}}$.
D'après le théorème des classes monotones

$$\boxed{\mathcal{F}_T^B=\mathcal{M}\text{ c-à-d }\forall A\in\mathcal{F}_T^B,\ \forall\varepsilon>0,\ \exists g\in vect\,\mathcal{C},\text{ tq }\mathbb{E}\left|1_A-g\right|<\varepsilon.}$$

Suite Méthode standard ?

• **Si ξ étagée**, il existe donc $n\in\mathbb{N}^*$, $\alpha_1,\cdots,\alpha_n\in\mathbb{R}$ et $A_1,\cdots,A_n\in\mathcal{F}_T$ tels que $\xi=\sum_{i=1}^n\alpha_i\,1_{A_i}$.
Soit $\varepsilon>0$, soit, pour $i=1\cdot\cdot n$, $g_i\in vect\,\mathcal{C}$ telle que $\mathbb{E}\left|1_{A_i}-g_i\right|<\frac{\varepsilon}{1+\sum_{i=1}^n|\alpha_i|}$
Posons $g\overset{\text{def}}{=}\sum_{i=1}^n\alpha_i\,g_i$. On a $\boxed{g\in vect\,\mathcal{C}\text{ et }\mathbb{E}\left|\xi-g\right|<\varepsilon}$.

• **Si $\xi\geqslant 0$**, il existe une suite croissante $(\xi_n)_n$ de fonctions étagées positives qui converge vers ξ. Soit $\varepsilon>0$. Donc il existe $N\in\mathbb{N}^*$ tel que $\mathbb{E}\left|\xi-\xi_N\right|<\frac{\varepsilon}{2}$, soit $g_N\in vect\,\mathcal{C}$ telle que $\mathbb{E}\left|\xi_N-g_N\right|<\frac{\varepsilon}{2}$. Ainsi, $\boxed{\mathbb{E}\left|\xi-g_N\right|<\varepsilon.}$

• **Si ξ intégrable et $\mathcal{F}_T^B$-mesurable**, Donc $\xi=\xi^+-\xi^-$, soit $\varepsilon>0$. Donc il existe $g^\pm\in vect\,\mathcal{C}$ telles que $\mathbb{E}\left|\xi^\pm-g^\pm\right|<\frac{\varepsilon}{2}$. Posons $g=g^+-g^-$, on donc $\boxed{g\in vect\,\mathcal{C}\text{ et }\mathbb{E}\left|\xi-g\right|<\varepsilon}$.

EXERCICE 44

Montrer le lemme 3

Réponse :

Prenons

$$\mathcal{B}\overset{\text{def}}{=}\left\{D\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}\quad tq\ \ \forall\varepsilon>0,\ \exists F\text{ compact },\ \exists U\text{ ouvert },\ F\subset D\subset U\text{ et }\nu\left(U\setminus F\right)<\varepsilon\right\}.$$

On montre que $\mathcal{B}$ est une tribu sur $\mathbb{R}^d$ qui contient les fermées de la forme $\prod_{i=1}^d\,]-\infty,a_i]$. Mais la famille de ces derniers engendre la tribu $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$. Ainsi $\mathcal{B}=\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$, ce qui donne le lemme 3. (à écrire et réécrire pour la culture générale ! ?).